Séminaire BOURBAKI
74e année, 2021–2022, no 1184

Octobre 2021

STRUCTURE DES LIMITES DES VARIÉTÉS NON EFFONDRÉES À COURBURE DE RICCI MINORÉE
[d'après J. Cheeger, W. Jiang and A. Naber]

par **Ilaria Mondello**

INTRODUCTION

Un célèbre théorème, démontré en 1981 par M. Gromov, affirme que toute suite de variétés riemanniennes pointées (M_i^n, g_i, p_i), dont la courbure de Ricci est uniformément minorée, admet une sous-suite convergente au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff pointée vers un espace métrique (X, d, p). Depuis lors, de nombreux mathématiciens, M. Anderson, S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, J. Cheeger, T. H. Colding, G. Tian, A. Naber, W. Jiang, ont étudié la structure de cet espace limite en essayant d'établir dans quelle mesure elle diffère de celle d'une variété riemannienne lisse : quelles sont les singularités qui peuvent apparaître ? Est-ce qu'il y en a peu, beaucoup, dans quel sens ? Dans ce texte, nous nous concentrerons sur les avancées récentes apportés par les travaux de Cheeger et Naber, 2015, Jiang et Naber, 2021, et Cheeger, Jiang et Naber, 2021, dans le cas d'une suite de variétés non effondrées, c'est-à-dire avec la condition supplémentaire que le volume d'une boule unité est uniformément minoré.

Les premiers résultats dans l'étude des espaces limites de variétés riemanniennes non effondrées ont été obtenus en supposant que la courbure de Ricci est bornée et pas seulement minorée. En dimension 2 et 3, une borne sur la courbure de Ricci est équivalente à une borne sur la courbure sectionnelle ou sur la courbure de Riemann. Dans ce cas, un résultat de pré-compacité en topologie Lipschitz découle des travaux sur le théorème de finitude des difféomorphismes de Cheeger, 1967 (voir aussi Dai et Rong, 2012). Il est en effet possible de démontrer qu'une suite de variétés non effondrées dont la courbure sectionnelle est bornée converge, au sens C^α de la métrique, vers une variété munie d'une métrique C^α (voir le chapitre 10 du livre de Petersen, 2016).

En dimension 4 en revanche, des singularités peuvent apparaître, comme le montre l'exemple de la métrique de Eguchi–Hanson ré-échelonnée, qui développe une singularité conique isolée (exemple 1.3 de ce texte). À la fin des années 80, plusieurs résultats ont été prouvés, d'abord dans le cas où la courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, c'est-à-dire Einstein, puis lorsque la courbure de Ricci est seulement supposée bornée. Les travaux de Anderson, 1989, Bando, Kasue et Nakajima, 1989, Tian, 1990, et Anderson, 1990, ont ensuite démontré qu'en supposant, en plus du non effondrement

et de la borne sur la courbure de Ricci, un contrôle uniforme de la topologie et du diamètre, l'espace limite est une variété riemannienne en dehors d'un nombre fini de singularités coniques orbifolds (voir aussi le théorème 4 de Anderson, 1995). Cela repose sur le fait que, en vertu de la formule de Chern–Gauss–Bonnet, le contrôle de la topologie et du diamètre implique une borne uniforme pour la norme L^2 de la courbure de Riemann. Plusieurs conjectures ont été formulées à partir de ce résultat. Tout d'abord la conjecture de la codimension 4, selon laquelle, en toute dimension n et sans hypothèse sur la courbure de Riemann, un espace limite de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée ne contient que des singularités de codimension supérieure ou égale à 4. En particulier, selon cette conjecture, les contrôles de la topologie et du diamètre ne sont pas nécessaires en dimension 4 pour que la limite ne possède que des singularités de type orbifold (voir la conjecture 3 de Anderson, 1995, et le paragraphe qui la précède). Il a de plus été conjecturé que la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-4}$ de l'ensemble des singularités est localement finie.

Entre la fin des années 90 et le début des années 2000, la conjecture de la codimension 4 a été prouvée en toute dimension dans des cas particuliers : lorsque la norme L^2 de la courbure de Riemann est bornée, ou lorsque la métrique est kählerienne. Ce sont des conséquences du théorème 1.15 de Cheeger, Colding et Tian, 2002 (voir respectivement les Remarques 1.17 et 1.18) ou également, pour le cas Kähler, du théorème 6.1 de Cheeger, 2003. Parallèlement, T. H. Colding et J. Cheeger ont développé une riche théorie qui a permis une meilleure compréhension de la géométrie des espaces limites, sous l'hypothèse moins restrictive de courbure de Ricci uniquement minorée. Ils ont démontré, entre autres, que le non effondrement et la minoration uniforme de la courbure de Ricci permettent d'obtenir des informations locales sur la géométrie de l'espace limite, exprimées à l'aide des cônes tangents. Un cône tangent en un point est obtenu comme un éclatement de l'espace en ce point, via un changement d'échelle. La théorie de Cheeger–Colding affirme alors que, pour les limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée, tout cône tangent est un cône métrique de la forme $\mathbb{R}^k \times C(Z)$, où $C(Z)$ est le cône sur un espace métrique Z. Cela donne lieu à une stratification de l'espace limite X en sous-ensembles singuliers $S^k(X)$ définis par la propriété que $x \in S^k(X)$ si et seulement si aucun cône tangent en x ne scinde un espace euclidien de dimension $(k+1)$. On a donc une stratification de l'espace limite donnée par

$$S^0(X) \subset \cdots \subset S^{n-1}(X) \subset X.$$

On désigne la k-ième strate singulière par $\Sigma^k(X) = S^k(X) \setminus S^{k-1}(X)$. À partir de cette stratification, désormais classique, T. H. Colding et J. Cheeger ont alors démontré qu'on peut décomposer X en un ensemble régulier $\mathcal{R} := X \setminus S^{n-1}(X)$, bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse, et un ensemble singulier de codimension au moins 2. Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

THÉORÈME A (J. Cheeger, T. H. Colding). — *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

convergeant vers un espace métrique (X, d, p). Alors :

1. *La strate singulière $\Sigma^{n-1}(X)$ est vide.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U_ε et $\alpha(\varepsilon, n) \in]0, 1[$, avec $\alpha(\varepsilon, n) \to 1$ quand ε tend vers 0, tels que U_ε contient $\mathcal{R}$ et est $\alpha(\varepsilon, n)$-bi-Hölder homéomorphe à une variété riemannienne de dimension n.*
3. *Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, la dimension de Hausdorff de $S^k(X)$ est inférieure ou égale à k. En particulier l'ensemble singulier $\mathcal{S} := S^{n-2}(X)$ vérifie*

$$\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S} \leq (n-2).$$

Le premier point découle du fait que l'existence d'une strate de codimension 1 impliquerait l'apparition d'un bord à la limite, ce qui n'arrive pas lorsque l'on considère des suites de variétés *sans bord*. L'information sur la dimension de Hausdorff est significative mais reste en un certain sens faible : on peut, par exemple, construire un espace limite dont le lieu singulier est dense et a mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-2}$ infinie (voir l'exemple 1.2 ci-dessous). En outre, les cônes tangents ne sont pas uniques, comme le montre l'exemple 8.41 de CHEEGER et COLDING, 1997, originalement dû à G. Perelman. Ils peuvent de plus présenter des comportements pathologiques ; COLDING et NABER, 2013, ont construit en toute dimension $n \geq 3$ des suites de variétés non effondrées à Ricci minoré, convergentes vers un espace (X, d, p) tel que pour tout entier $k = 0, \ldots, n-2$, il existe un cône tangent en p qui scinde un espace euclidien de dimension k, mais qui ne scinde pas d'espace euclidien de dimension $k+1$. En dimension 5, ils ont exhibé également un espace limite (Y, d, y) qui possède deux cônes tangents en y, dont les sections ne sont pas homéomorphes. Dans le même article, T. H. Colding et A. Naber ont conjecturé que l'ensemble des points où le cône tangent n'est pas unique a dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-3$.

En 2011, J. Cheeger et A. Naber ont introduit un nouvel outil, inspiré par les travaux précédents de CHEEGER, 2012, et de CHEEGER et NABER, 2013b : la stratification quantitative (voir l'article de CHEEGER et NABER, 2013a). Grâce à cette dernière, ils ont pu relier des bornes L^q, $q < 2$, sur la courbure de Riemann avec des estimées de volume pour le voisinage tubulaire d'une strate quantitative (voir le théorème 1.8 de CHEEGER et NABER, 2015). Au cours des sept années suivantes, leurs travaux avec W. Jiang ont résolu l'ensemble des conjectures citées ci-dessus. Dans le cas où la courbure de Ricci est bornée, J. Cheeger et A. Naber ont démontré la conjecture de la codimension 4 et W. Jiang et A. Naber ont montré des bornes L^2 a priori pour la courbure de Riemann, en toute dimension, conjecturées par NABER, 2014 et CHEEGER et NABER, 2015 (voir respectivement les articles de CHEEGER et NABER, 2015, et JIANG et NABER, 2021). Lorsque la courbure de Ricci est uniquement minorée, parmi les nombreux résultats de leur dernier article, CHEEGER, JIANG et NABER, 2021, ont

prouvé l'unicité des cônes tangents en dehors d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^{n-2}$ nulle. En outre, ils ont démontré que, même si les ensembles S^k ne se comportent pas comme des sous-variétés de dimension k, ils sont *k-rectifiables* : en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle, ils sont recouverts par des cartes bi-Lipschitz à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$. Plus précisément, nous pouvons énoncer les trois résultats suivants.

Théorème B (Rectifiabilité des strates, Cheeger, Jiang et Naber, 2021)
Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) dans la topologie de Gromov–Hausdorff pointée. Alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$ l'ensemble $S^k(X)$ est k-rectifiable. En outre, en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle, si $x \in S^k(X)$, alors tous les cônes tangents scindent un espace euclidien $\mathbb{R}^k$.

Ce théorème, avec la convergence du volume de Cheeger–Colding, implique directement que les cônes tangents sont uniques en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathcal{H}^{n-2}$ nulle (voir le théorème 1.15 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème C (Codimension 4, Cheeger et Naber, 2015 et mesure localement finie, Jiang et Naber, 2021)
Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que

$$\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leq (n-1) \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) au sens de Gromov–Hausdorff pointé. Alors l'ensemble singulier $\mathcal{S}$ est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-4$, il est $(n-4)$-rectifiable et de mesure $\mathcal{H}^{n-4}$ localement finie.

À l'aide de ce théorème, J. Cheeger et A. Naber ont aussi pu démontrer de nouveaux résultats pour les variétés lisses de dimension 4, non effondrées et à courbure de Ricci bornée ; par exemple le nombre fini de types de difféomorphismes lorsque le diamètre est borné, ou le fait qu'une 4-variété Ricci plate à croissance euclidienne du volume est asymptotiquement localement plate (voir respectivement le théorème 1.12 et le corollaire 8.86 de l'article de Cheeger et Naber, 2015).

Théorème D (Bornes L^2 pour la courbure de Riemann, Jiang et Naber, 2021)
Il existe une constante $C(n, v)$ telle que pour toute variété riemannienne (M^n, g) riemannienne qui vérifie $\| \mathrm{Ric}_g \| \leq (n-1)$ et $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0$,

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_g(B_1(p))} \int_{B_1(p)} \|\mathrm{Rm}_g\|^2 dv_g \leq C(n, v).$$

Certaines des techniques utilisées dans les démonstrations de ces résultats ont été parallèlement exploitées en dehors du contexte des limites de variétés, dans l'étude des singularités des solutions de nombreuses équations géométriques ou des minimiseurs de problèmes variationnels : on peut citer par exemple les travaux de Naber et

Valtorta, 2017a, Naber, Valtorta et Veronelli, 2019, Breiner et Lamm, 2015, sur les applications harmoniques ; ceux de Cheeger, Haslhofer et Naber, 2013, et Cheeger, Haslhofer et Naber, 2015, sur le flot de la courbure moyenne ; ou encore l'article de Naber et Valtorta, 2019, sur les connexions de Yang–Mills ; les articles de Focardi, Marchese et Spadaro, 2015, et de De Lellis, Marchese, Spadaro et Valtorta, 2018, sur les surfaces minimales au sens des courants de codimension supérieure à 1, ou de Edelen et Engelstein, 2019, concernant des problèmes à bord libre. En outre, une question naturelle liée à la théorie de Cheeger–Colding est celle de la définition d'une notion généralisée de la minoration de la courbure de Ricci pour des espaces métriques mesurés, stable par rapport à la convergence de Gromov–Hausdorff. Une réponse possible été donnée par la désormais vaste théorie des espaces RCD, initiée à partir de 2006 par les travaux de J. Lott, K. T. Sturm et C. Villani et de L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. Des travaux récents montrent comment les techniques liées à la stratification quantitative sont aussi fructueuses dans le cadre des espaces RCD (voir par exemple las articles de Mondino et Naber, 2019, Antonelli, Brué et Semola, 2019 et Brué, Pasqualetto et Semola, 2019).

Dans ce texte, nous essayons de présenter les grandes lignes de la théorie de Cheeger–Colding et des développements récents apportés par J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber : nous illustrons certains de ses outils principaux et essayons de dégager les idées importantes, en renvoyant aux articles originaux pour les détails. Nous nous concentrons principalement sur le théorème B, dont la démonstration repose sur des estimées de volume pour les voisinages tubulaires des strates quantitatives. Nous présentons la structure de la démonstration de ces estimées, en soulignant ses points communs, et ses différences, avec la théorie de Cheeger–Colding et avec les démonstrations des théorèmes C et D. Enfin, pour donner une idée plus précise des techniques utilisées dans les articles de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, nous présentons un des théorèmes qui interviennent dans la preuve des estimées de volume et sa démonstration : le théorème de transformation. Nous avons choisi ce dernier car sa preuve est représentative de certaines des techniques communes aux trois derniers articles des auteurs, comme l'utilisation de la démonstration par l'absurde, l'exploitation des interactions entre l'analyse et la géométrie, le passage d'une propriété analytique ou géométrique d'une échelle donnée aux échelles inférieures. En outre, le théorème de transformation permet d'obtenir une démonstration nouvelle et plus simple de l'existence de cartes bi-Hölder entre l'ensemble régulier d'un espace limite et une variété lisse (le deuxième point du théorème A).

Dans les deux premières sections, nous présentons des exemples de suites de variétés lisses, à courbure de Ricci minorée ou bornée, qui convergent vers des espaces singuliers, puis nous énonçons les définitions, les résultats et les principes de la théorie de Cheeger–Colding qui jouent un rôle important dans la suite.

Dans la troisième section, nous définissons les strates quantitatives, en donnons des exemples, et énonçons le résultat sur les estimées de volume qui permet de prouver le théorème B.

Dans la quatrième section, nous expliquons la structure de la démonstration de ce résultat et présentons ses outils, en particulier les régions collier et le théorème de structure des régions collier.

Dans la section suivante, nous exposons les idées des démonstrations des théorèmes C et D, à la lumière des éléments présentés dans les sections précédentes.

Enfin, la dernière section présente le théorème de transformation, la démonstration par l'absurde de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, et une preuve alternative proposée par G. Carron.

Remerciements : Je tiens à remercier A. Naber pour ses réponses détaillées à mes questions ; J. Cheeger et W. Jiang pour leurs retours sur ce texte ; L. Bessières, G. Carron, D. Semola, V. Bour, A. Deruelle et N. Bourbaki pour les échanges fructueux que nous avons eus, leurs relectures et leurs suggestions ; S. Mondello pour les dessins. Merci aussi à mes collègues des équipes de géométrie de l'UPEC et de l'IMJ pour nos nombreuses discussions durant la préparation de ce texte.

1. EXEMPLES D'ESPACES LIMITES

Nous illustrons dans cette section des exemples d'espaces limites de suites de variétés à courbure de Ricci minorée, qui présentent des singularités de codimension 2, et des suites de variétés dont la courbure de Ricci est bornée, où des singularités de codimension 4 apparaissent.

1.1. Cônes et singularités de codimension 2

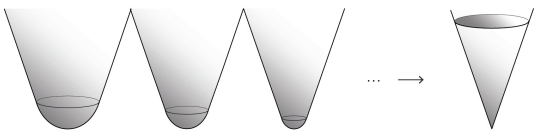
Un cône d'angle α en dimension 2 est le produit de $\mathbb{R}_+$ avec un cercle $\mathbb{S}^1_\alpha$ de longueur $\alpha > 0$, où l'on identifie en un seul point, le sommet du cône o, tous les points de $\{0\} \times \mathbb{S}^1_\alpha$:

$$C(\mathbb{S}^1_\alpha) = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^1_\alpha / \sim, \text{ où } \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^1_\alpha, \ (0, \theta_1) \sim (0, \theta_2).$$

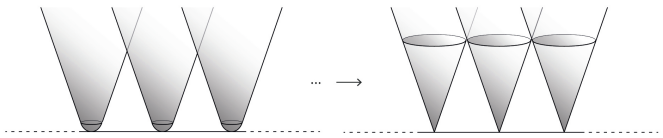
On munit $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de la distance d_α définie par la loi du cosinus :

$$d_\alpha((s, \theta_1), (t, \theta_2)) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2st \cos(\min\{d(\theta_1, \theta_2), \pi\})},$$

où d est la distance sur $\mathbb{S}^1_\alpha$. Si l'angle du cône α est inférieur ou égal à 2π, $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$ est une limite de variétés lisses à courbure de Ricci positive. En effet, pour une suite de rayons $r_i > 0$, $r_i \to 0$, on peut remplacer la boule centrée en o de rayon r_i, c'est-à-dire le cône tronqué $[0, r_i] \times \mathbb{S}^1_\alpha / \sim$, par une calotte de sphère, en préservant la positivité de la courbure de Ricci. On obtient ainsi une suite de variétés lisses à courbure de Ricci minorée qui converge vers le cône $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$.



Il en résulte que l'espace $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ muni de la distance induite par la métrique produit est une limite de variétés lisses (M^n_i, g_i, x_i) à courbure de Ricci positive. En revanche, nous verrons que X ne peut pas être obtenu comme limite de variétés dont la courbure de Ricci est *bornée*, ce qui joue un rôle important dans la preuve de la conjecture de la codimension 4 (voir la section 5.1 de ce texte).

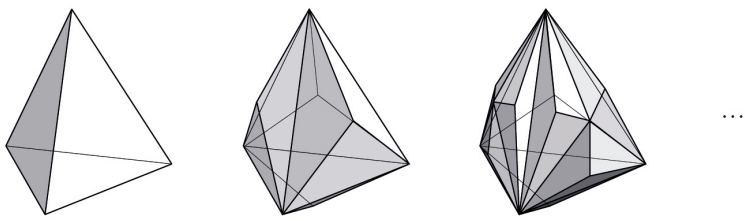


On peut noter qu'un cône $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de dimension 2 et d'angle α supérieur à 2π ne peut être limite de variétés à courbure de Ricci minorée. En effet, s'il existait une suite de surfaces (M^2_i, g_i, x_i) convergentes vers $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$, dont la courbure de Ricci est minorée $\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -\lambda$, le cône d'angle supérieur à 2π serait un espace d'Alexandrov de courbure minorée par $-\lambda$, donc non-branchant. Cependant, toutes les géodésiques reliant deux points de $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de distance supérieure à 2π et passant par le sommet sont branchantes au sommet.

1.2. Une surface infiniment singulière

Nous allons donner un exemple d'espace limite X dont l'ensemble singulier vérifie bien $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{S}) \leq n-2$, mais tel que pour tout $x \in X$ la mesure $\mathcal{H}^{n-2}(\mathcal{S} \cap B_1(x))$ est infinie (voir l'exemple 3.4 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

On considère un tétraèdre Z^2 centré à l'origine de $\mathbb{R}^3$ dont les côtés ont longueur L. On construit un premier élément d'une suite Z^2_1 de la façon suivante : on attache à chaque face de Z^2 un tétraèdre dont la base coïncide avec la face correspondante de Z^2 et dont la hauteur est $h_1 \ll L$. Pour obtenir Z^2_2 on fait de même avec toutes les faces de Z^2_1, en attachant des tétraèdres d'une hauteur $h_2 < h_1$. On obtient ainsi une suite Z^2_i, avec h_i qui tend vers 0, et telle que Z^2_i converge au sens de Hausdorff vers une limite $X = Z^2_\infty$. En particulier, X possède une infinité de points singuliers, les sommets, qui appartiennent à la strate $S^0(X)$ et sont denses dans X. Pour chaque point $x \in X$, la boule $B_1(x)$ contient un nombre infini de points singuliers. En outre, X peut être obtenu comme limite de surfaces à courbure sectionnelle positive : on construit une suite M^2_i en « lissant » chaque Z^2_i, comme on l'a fait pour le sommet d'un cône dans l'exemple 1.1.



1.3. Métrique de Eguchi–Hanson

Des singularités peuvent apparaître même à la limite d'une suite de variétés non effondrées à courbure de Ricci *bornée*. Nous illustrons ici l'exemple le plus simple de ce phénomène, donné par un ré-échelonnement de la métrique de Eguchi–Hanson en dimension 4. Cette dernière, notée g_{EH}, est une métrique lisse qui peut être définie sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{S}^2$ de la sphère, ou de façon équivalente sur l'éclatement au sens algébrique de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ à l'origine, que nous notons X. L'espace X peut être vu comme $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ avec, attachée en l'origine, une sphère unitaire $\mathbb{S}^2$.

La métrique de Eguchi–Hanson g_{EH} est une métrique hyperkählerienne qui possède de nombreuses propriétés : en particulier, ce qui nous intéresse dans notre contexte, elle est Ricci plate, c'est-à-dire $\mathrm{Ric}_{g_{\mathrm{EH}}} = 0$, et asymptotiquement localement euclidenne (ALE). À l'infini g_{EH} est asymptotique à la métrique conique de $C(\mathbb{RP}^3)$: voir par exemple l'article de Biquard, 2013, l'exemple 7.2.2 du livre de Joyce, 2000, ou l'exercice 5 du chapitre 3 dans le livre de Petersen, 2016. Si nous considérons les espaces $(X, r^2 g_{\mathrm{EH}})$ avec la métrique de Eguchi–Hanson ré-échelonnée, ils convergent alors vers le cône $C(\mathbb{RP}^3)$ quand r tend vers 0. Intuitivement, le changement d'échelle transforme la sphère unitaire $\mathbb{S}^2$ qui désingularise l'origine dans X en une sphère de rayon r, qui à la limite pour $r \to 0$ se contracte en un seul point singulier. Ce dernier est le sommet du cône, qui est alors une singularité de codimension 4 dans $C(\mathbb{RP}^3)$.

1.4. Construction(s) de Kummer

À l'aide de la métrique de Eguchi–Hanson, il est possible de construire d'autres exemples de métriques Einstein, Ricci plates, convergeant vers un espace limite qui possède des singularités de type orbifold, dont le modèle local est un cône sur un quotient de la sphère unité par un groupe fini d'isométries.

L'exemple le plus connu est la construction de Kummer sur une surface complexe K3. Il s'agit d'une variété complexe et compacte de dimension 2, donc de dimension réelle 4, simplement connexe et dont le fibré canonique est trivial. D'après un résultat de Kodaira, toutes les surfaces K3 sont difféomorphes : nous pouvons donc parler de *la* surface K3. Observons aussi que la surface K3 est une variété de Calabi–Yau ; grâce à la preuve de la conjecture de Calabi due à S. T. Yau, il existe sur K3 une métrique hyperkähler donc Ricci plate. En réalité, on connaît l'espace des modules des métriques hyperkähler et on sait que, une fois le volume normalisé, il est de dimension réelle 57 : il y a donc beaucoup de métriques Ricci plates sur K3. La construction de Kummer a été proposée par deux physiciens, Gibbons et Pope, 1979, pour décrire de façon plus explicite une métrique Ricci plate sur la surface K3. Elle permet en particulier d'obtenir l'existence d'une suite de métriques lisses g_i sur K3, Ricci plates, telles que $(\mathrm{K3}, g_i)$ converge vers $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ et développe donc 16 singularités isolées. Puisque les singularités $\{p_1, \ldots, p_{16}\}$ de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ sont modelées sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, l'idée de la construction de Kummer consiste à désingulariser chaque p_i en remplaçant un voisinage de p_i par l'éclatement de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ décrit ci-dessus, et en le munissant de la métrique de Eguchi–Hanson. Il faut ensuite recoller ces éclatements

pour obtenir une seule métrique Kähler, Ricci plate sur la surface K3. Il n'est pas trivial de démontrer rigoureusement qu'il est possible de faire ce recollement : nous pouvons citer les preuves données par LeBrun et Singer, 1994 ; Topiwala, 1987 ; Donaldson, 2012 ; Biquard et Minerbe, 2011.

Observons qu'en faisant un changement d'échelle approprié autour d'un point $x \in \mathrm{K3}$, choisi de façon à être Gromov–Hausdorff proche d'une singularité p_i, les métriques g_i convergent vers la métrique g_{EH}. Ceci est un cas particulier, et l'exemple prototype, d'un phénomène propre aux limites de variétés Einstein en dimension 4 : la limite possède des singularités orbifolds modelées sur des variétés ALE Ricci plates. Nous renvoyons aux notes de Foscolo, 2018, pour une exposition plus précise.

D'autres constructions inspirées par celle de Kummer existent pour des singularités non isolées en dimension supérieure : D. Joyce a en effet donné de nombreux exemples de suites de variétés Einstein qui convergent vers des tores orbifolds $\mathbb{T}^n/\Gamma$, en dimension $n = 7$ et $n = 8$, où Γ est un groupe fini d'isométries, voir par exemple les chapitres 11 et 12 du livre de Joyce, 2000, ou l'article du même auteur, Joyce, 2004. En dimension 7, les singularités sont localement de la forme $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{C}^2/G)$ ou $\mathbb{R} \times (\mathbb{C}^3/G)$, respectivement pour un groupe fini G de SU(2) ou de SU(3). À l'aide de résultats de géométrie algébrique complexe, il est possible de désingulariser les quotients $\mathbb{C}^2/G$ et $\mathbb{C}^3/G$ avec des « résolutions crépantes », analogues à l'éclatement en l'origine de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Grâce à des résultats de P. Kronheimer et D. Joyce, il existe des métriques Ricci plates, ALE, asymptotiques à l'infini aux métriques euclidiennes sur $\mathbb{C}^2/G$ et $\mathbb{C}^3/G$. Une procédure de recollement sophistiquée permet alors d'obtenir des variétés compactes Einstein convergentes vers $\mathbb{T}^7/\Gamma$. Notons que l'un des intérêts et des motivations de ces constructions est que les variétés obtenues fournissent des exemples de variétés à holonomie spéciale, G_2 en dimension 7 et Spin(7) en dimension 8.

2. PRÉLIMINAIRES : LA THÉORIE DE CHEEGER–COLDING

Dans cette section nous donnons les définitions utiles dans la suite, puis nous rappelons quelques éléments essentiels de la théorie de Cheeger–Colding, en nous concentrant sur les idées qui interviennent également dans les articles de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, Cheeger et Naber, 2015, et Jiang et Naber, 2021. Nous résumons les résultats qui ont mené à la définition de la stratification classique et à la démonstration du théorème A, qui contient plusieurs de résultats obtenus dans les travaux de J. Cheeger et T. H. Colding datant de 1996 à 2000. Nous renvoyons aussi aux notes de Cheeger, 2001, qui donnent une vision d'ensemble de nombreux éléments et des techniques de la théorie.

2.1. Définitions

La géométrie locale autour des singularités des espaces limites que nous considérons est modelée sur des cônes métriques, définis comme suit.

Définition 2.1. — *Soit (Y, d^Y) un espace métrique. Le* cône sur Y *est l'espace métrique $(C(Y), d)$ où $C(Y) = [0, +\infty[\times Y/\sim$ avec $(0, y_1) \sim (0, y_2)$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$ et la distance d entre deux points (s, y_1) et (t, y_2) est donnée par la règle du cosinus :*

$$d((s, y_1), (t, y_2)) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(\min\{d^Y(y_1, y_2), \pi\})}.$$

On note o le sommet du cône $C(Y)$.

Un espace métrique (Z, d^Z) est un cône métrique par rapport à $z \in Z$ s'il existe un espace métrique (Y, d^Y) et une isométrie $\varphi : Z \to C(Y)$ telle que $\varphi(z) = o$.

Définition 2.2. — *Un espace métrique (X, d) est dit* k-symétrique *par rapport à $x \in X$ s'il existe un espace métrique (Y, d^Y) et une isométrie $\varphi : X \to \mathbb{R}^k \times C(Y)$ telle que $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{o\}$.*

Un espace k-symétrique est toujours un cône métrique : en effet, $\mathbb{R}^k \times C(Y)$ est isométrique à un cône $C(Z)$, où Z est une k-suspension sphérique de Y.

Afin de définir les strates quantitatives dans la section 4, on se sert d'une « quantification » de la k-symétrie : pour une boule dans un espace métrique, on souhaite pouvoir dire combien, et à quelle échelle, la boule est proche au sens de Gromov–Hausdorff d'une boule k-symétrique. Nous notons par $B_r(x)$ une boule de rayon r centrée en un point x d'un espace métrique, et par $\mathbb{B}^k_r$ une boule euclidienne de rayon r centrée en $0^k \in \mathbb{R}^k$. Pour un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) nous notons par $B_r(A)$ le voisinage tubulaire de taille r de A : $B_r(A) = \{x \in X,\ d(x, A) < r\}$.

Nous renvoyons au chapitre 7 du livre de Burago, Burago et Ivanov, 2001, pour la définition de la Gromov–Hausdorff proximité et des presque isométries.

Définition 2.3. — *Une boule $B_r(x)$ dans un espace métrique (X, d) est* (k, ε)-symétrique *s'il existe un espace métrique $\mathbb{R}^k \times C(Y)$ tel que*

$$\mathrm{d_{GH}}(B_r(x), B_r^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)) < \varepsilon r.$$

On peut observer que cette définition équivaut à dire qu'avec le changement d'échelle $\tilde{d} = r^{-1}d$, qui transforme la boule $B_r(x)$ en une boule unité pour $\tilde{d}$, la boule $\tilde{B}_1(x)$ dans $(X, \tilde{d})$ est ε-proche de la boule unité k-symétrique $B_1^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)$. On remarque aussi que la propriété de (k, ε)-symétrie ne passe pas nécessairement aux échelles inférieures : en raison du changement d'échelle, si une boule $B_r(x)$ est (k, ε)-symétrique, une boule $B_s(x)$ pour $s < r$ peut ne pas l'être, car sa distance de la boule k-symétrique $B_s^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)$ n'est pas forcément contrôlée par εs.

Dans le cadre des variétés lisses à courbure de Ricci minorée, il est possible de traduire en termes analytiques la propriété géométrique de (k, ε)-symétrie, à l'aide de la notion de (k, δ)-*splitting* harmonique.

Définition 2.4. — *Soit (M^n, g) une variété lisse. Une application $u = (u^1, \dots, u^k) : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ est un* (k, δ)-splitting harmonique *si elle satisfait :*

1. $\Delta u^i = 0$ *pour tout* $i = 1, \dots, k$.
2. $\fint_{B_r(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta^{ij}| dv_g < \delta$.
3. $\sup_{B_r(p)} |\nabla u| < 1 + \delta$.
4. $r^2 \fint_{B_r(p)} |\nabla^2 u|^2 dv_g < \delta^2$,

où nous avons noté $\fint_{B_r(p)} f dv_g = \dfrac{1}{\mathrm{vol}_g(B_r(p))} \displaystyle\int_{B_r(p)} f dv_g$.

Comme la propriété de (k, ε)-symétrie, le fait d'être un (k, δ)-splitting sur une boule $B_r(p)$ ne passe pas nécessairement aux échelles inférieures : en effet, si on restreint un (k, δ)-splitting $u : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ à une boule $B_s(p)$ avec $s < r$, les propriétés 2 et 4 ne sont pas nécessairement préservées, à cause de la moyenne qui apparaît dans les deux intégrales.

Cheeger et Colding, 1996, ont démontré qu'il existe une constante dimensionnelle $C(n)$ telle que pour ε, δ opportunément choisis, si $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$ et $B_2(p)$ est (k, ε)-symétrique, alors il existe une application harmonique u de $B_1(p)$ dans $\mathbb{R}^k$ satisfaisant la condition 2 et dont le gradient est borné par $C(n)$. Réciproquement, l'existence d'une telle fonction garantit la GH-proximité à une boule k-symétrique. La preuve du lemme 3.34 de Cheeger et Naber, 2015, permet d'affirmer que u peut être choisie de plus comme un (k, δ)-splitting : cela est résumé par le résultat suivant.

Proposition 2.5 (Cheeger et Naber, 2015, Lemme 1.21)
Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *dépendant de* ε, n, *tel que pour toute variété* (M^n, g) *avec* $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$:

1. *S'il existe un* (k, δ)*-splitting harmonique* $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$, *alors* $B_1(p)$ *est* (k, ε)*-symétrique.*
2. *Si* $B_4(p)$ *est* (k, δ)*-symétrique, alors il existe un* (k, ε)*-splitting harmonique* $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$.

On définit également la k-rectifiabilité, utilisée dans les théorèmes B et 3.8 :

Définition 2.6. — *Un espace métrique* (X, d) *est* k-rectifiable *s'il existe une collection dénombrable* $\{X_i\}_{i \in I}$ *de sous-ensembles de* X, *mesurables pour la mesure de Hausdorff* $\mathcal{H}^k$ *et telle que :*

1. $\mathcal{H}^k(X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i) = 0$.
2. *Pour tout* $i \in I$, *il existe une application* $\phi_i : X_i \to \mathbb{R}^k$ *bi-Lipschitz sur son image.*

2.2. Cônes tangents et stratification classique

Tout au long de cette section nous considérons un espace métrique pointé (X, d, p) obtenu comme limite d'une suite de variétés Riemanniennes lisses (M_i^n, g_i, p_i) telles que

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

La géométrie locale en un point de X est décrite par les cônes tangents, définis comme suit.

Définition 2.7. — *Un espace métrique* (X_x, d_x, x) *est un* cône tangent à X en x *s'il existe une suite* r_i *tendant vers* 0 *telle que*

$$(X, r_i^{-1} d, x) \to (X_x, d_x, x).$$

En général, le cône tangent en un point n'est pas unique, comme l'ont montré les exemples donnés par les articles de Cheeger et Colding, 1997 (voir exemple 8.41), ou de Colding et Naber, 2013. Dans le cas des espaces limites que nous considérons, un cône tangent est aussi limite d'une sous-suite de variétés lisses pointées $(M^n_{i_j}, \tilde{g}_{i_j}, x_{i_j})$ munies de la métrique ré-échelonnée $\tilde{g}_{i_j} = r_{i_j}^{-2} g_{i_j}$. Nous avons alors $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}_{i_j}} \geq -(n-1) r_{i_j}^2$; si de plus la courbure de Ricci est bornée par $(n-1)$ nous obtenons $\| \mathrm{Ric}_{\tilde{g}_{i_j}} \| \leq (n-1) r_{i_j}^2$ avec r_{i_j} qui tend vers 0.

Exemple 2.8. — Pour le produit $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, les cônes tangents sont uniques en tout point ; ils coïncident avec l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ en dehors des sommets $x_* \in \mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$. En un sommet x_*, le cône tangent est donné par X, car un cône est invariant par les dilatations qui fixent le sommet.

L'un des résultats fondamentaux de la théorie de Cheeger–Colding affirme que pour tout cône tangent X_x il existe k tel que X_x est k-symétrique. Pour prouver cela, la première étape consiste à montrer que les cônes tangents sont des cônes métriques au sens de la Définition 2.1. Cela a été démontré dans le théorème 5.2 de Cheeger et Colding, 1997 : la preuve se sert du non effondrement et du théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique », que nous rappelons dans la section ci-dessous. L'hypothèse de non effondrement est cruciale ; en effet, dans le cas des limites effondrées, il existe des exemples où le cône tangent n'est pas un cône métrique (voir l'exemple 8.95 du même article de 1997). Deuxièmement, un argument d'éclatement et le théorème de scindement pour les espaces limites, énoncé dans le théorème 9.7 des notes de Cheeger, 2001, permettent d'obtenir la k-symétrie. Nous définissons alors, pour un espace limite (X, d, p),

$$S^k(X) = \{x \in X \text{ tel que aucun cône tangent } X_x \text{ en } x \text{ n'est } (k+1)\text{-symétrique}\}.$$

En d'autres termes, $S^k(X)$ est l'ensemble des points dont les cônes tangents possèdent au plus k symétries. Cela permet d'obtenir une filtration de l'espace limite :

$$S^0(X) \subset S^1(X) \subset \ldots \subset S^{n-1}(X) \subset X.$$

Nous désignons la *k-ième strate singulière* par $\Sigma^k(X) = S^k(X) \setminus S^{k-1}(X)$, l'*ensemble singulier* de X par $\mathcal{S} = S^{n-1}(X)$ et l'*ensemble régulier* par $\mathcal{R} = X \setminus \mathcal{S}$.

Exemple 2.9. — Pour le produit $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, l'ensemble singulier coïncide avec la strate singulière de codimension 2, qui est constituée par l'ensemble des sommets : $S^{n-2}(X) = \Sigma^{n-2}(X) = \mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$.

Remarque 2.10. — L'inégalité de Bishop–Gromov, que nous rappelons ci-dessous, et la continuité du volume, prouvée par Colding, 1997 (voir aussi le théorème 9.31 des notes de Cheeger, 2001), impliquent que pour tout x dans la strate singulière $\Sigma^{n-2}(X)$ de l'espace limite X il existe un cône tangent X_x de la forme $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha \in]0, 2\pi[$. Nous renvoyons également vers le théorème 4.2 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021.

2.3. Presque cône en volume implique presque cône métrique

Le théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique » est une des étapes clefs pour montrer que les cônes tangents sont des cônes métriques (voir le théorème 3.6 de Cheeger et Colding, 1996, et le théorème 9.45 des notes de Cheeger, 2001). Il relie le pincement d'une quantité monotone, le *rapport de volumes*, et la géométrie d'une boule. Le fait de mettre en relation des propriétés géométriques avec le contrôle d'une quantité monotone représente un élément important de la théorie de Cheeger–Colding. C'est en effet une idée commune à différents problèmes d'étude de la régularité et de l'ensemble singulier des solutions d'une équation géométrique. On peut citer par exemple les applications harmoniques minimisantes (Naber et Valtorta, 2017a, Simon, 1996) ou bi-harmoniques (Breiner et Lamm, 2015), les connexions de Yang–Mills stationnaires (Naber et Valtorta, 2019), les solutions d'équations elliptiques (Naber et Valtorta, 2017b). Le point de départ commun dans ces différents problèmes consiste à se servir d'une quantité monotone, qui possède des propriétés de rigidité, pour obtenir des informations sur les symétries de l'ensemble singulier. Nous renvoyons à la section 1.4 de l'article de Naber et Valtorta, 2017a, et au livre de Simon, 1996, pour une exposition détaillée de ce principe.

Dans le contexte des espaces limites de variétés à courbure de Ricci minorée, la quantité monotone utilisée dans la théorie de Cheeger–Colding est le *rapport de volumes*. Pour une variété (M^n, g) avec $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$, le rapport de volumes est défini par

$$\mathcal{V}_r(p) = \frac{\mathrm{vol}_g(B_r(p))}{v_{-\delta}(r)}, \tag{1}$$

où $v_{-\delta}(r)$ est le volume d'une boule de rayon r dans la variété à courbure constante égale à $-\delta$. L'inégalité classique de Bishop–Gromov affirme que $\mathcal{V}_r(p)$ est décroissante avec le rayon. Le résultat suivant affirme que si le *pincement du rapport de volume* est assez petit en un point, une boule autour de ce point est proche d'une boule dans un cône métrique (voir aussi la section 4.1 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème 2.11. — *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, dépendant de ε, n, tel que pour toute variété (M^n, g) telle que $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$, si $p \in M$ satisfait $\mathcal{V}_2(p) \geq (1-\delta)\mathcal{V}_1(p)$, alors $B_1(p)$ est $(0, \varepsilon)$-symétrique.*

Cheeger et Naber, 2013a, ont étendu ce théorème pour détecter non seulement la $(0, \varepsilon)$-symétrie, mais aussi la proximité en topologie de Gromov–Hausdorff à une boule k-symétrique, pour $k \geq 1$: ils montrent qu'une boule est (k, ε)-symétrique sous

une hypothèse plus sophistiquée de pincement du rapport de volume (voir aussi les théorèmes 4.6 et 4.9 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021). La relation entre le pincement d'une quantité monotone en un point et les propriétés analytiques et géométriques des boules jouent également un rôle important dans les travaux de Cheeger et Naber, 2015, Jiang et Naber, 2021, et Cheeger, Jiang et Naber, 2021 (voir les sections 4.3 et 5.2 de ce texte).

2.4. Le théorème A et la partie régulière de l'espace limite

Le premier point du théorème A affirme que la strate singulière de dimension $(n-1)$ est vide. La démonstration se sert d'un raisonnement par l'absurde : s'il existait un point x dans $\Sigma^{n-1}(X)$, alors il admettrait un cône tangent X_x de la forme $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$. Or, ceci est un demi-espace ayant pour bord $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. J. Cheeger et T. H. Colding montrent qu'un tel demi-espace ne peut être obtenu comme limite de variétés sans bord, non effondrées, dont la courbure Ricci vérifie $\mathrm{Ric}_{g_i}\geq\delta_i$ avec δ_i qui tend vers 0. On peut trouver cette démonstration dans la section 6 de Cheeger et Colding, 1997, ou la démonstration du théorème 10.22 des notes de Cheeger, 2001.

Pour la démonstration de l'inégalité $\dim_{\mathcal{H}} S^k\leq k$, nous renvoyons au théorème 4.7 de Cheeger et Colding, 1997, et au théorème 10.20 des notes de Cheeger, 2001. Nous nous concentrons dans la suite sur les ingrédients principaux de la démonstration du deuxième point, c'est-à-dire le fait qu'un ouvert U_ε de l'espace limite, contenant la partie régulière $\mathcal{R}$, est bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse. Pour $\varepsilon>0$, l'ensemble U_ε du théorème A est donné par

$$U_\varepsilon=\left\{x\in X \text{ tel que } \theta(x):=\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^n(B_r(x))}{\omega_n r^n}\geq 1-\varepsilon\right\},$$

où ω_n est le volume de la boule unité euclidienne et $\theta(x)$ est la *densité* au point x. À cause de la continuité du volume et de l'inégalité de Bishop–Gromov, pour tout $x\in X$ nous savons que $\theta(x)\leq 1$; l'ensemble régulier $\mathcal{R}$ coïncide avec l'ensemble des points de densité égale à 1.

Remarque 2.12. — Dans l'exemple 1.2, l'ensemble singulier de Z^2_∞ est dense. Néanmoins, pour $\varepsilon>0$ assez petit, U_ε est constitué de Z^2_∞ privé d'un nombre fini de points. En effet, chaque surface Z^2_i de la suite est plate et, en dehors des sommets, le volume des boules est euclidien, donc pour tout $x\in Z^2_i$, sauf les sommets, la densité $\theta(x)$ est égale à 1. En un sommet x_i, la densité dépend de la proximité de l'angle α en x_i à 2π : $\theta(x_i)=1-\varepsilon(\alpha)$, où $\varepsilon(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 2π. Fixons $\alpha\in]0,2\pi[$ tel que $\varepsilon(\alpha)<\varepsilon$. Puisque la hauteur h_i des tétraèdres qui composent Z^2_i tend vers zéro quand i tend vers l'infini, pour chaque i il y a un nombre fini de sommets dont l'angle est strictement inférieur à α. En particulier, à la limite Z^2_∞, il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers $\{x^1_\infty,\dots,x^N_\infty\}$ qui sont limites de sommets d'angle strictement inférieur à α. D'autre part, si la boule $B_r(x_i)\subset Z^2_i$ centrée en un sommet ne contient que des

sommets d'angle supérieur à α, alors

$$\mathrm{vol}_i\left(B_r(x_i)\right) \geq \left(1-\varepsilon(\alpha)\right) r^2 \omega_n.$$

À cause de la continuité du volume, si $B_r(x_\infty) \subset Z^2_\infty$ est la limite des boules $B_r(x_i)$, on obtient

$$\mathcal{H}^2\left(B_r(x_\infty)\right) \geq \left(1-\varepsilon(\alpha)\right) \omega_n r^n,$$

donc la densité en x_∞ est supérieure ou égale à $1-\varepsilon(\alpha)$. Avec notre choix de α, pour tout x dans Z^2_∞ privé de $\{x^1_\infty, \ldots, x^N_\infty\}$, la densité vérifie alors $\theta(x) \geq 1-\varepsilon$. Il y a donc un nombre fini de points dont la densité est strictement inférieure à $(1-\varepsilon)$, en dehors desquels Z^2_∞ est bi-Hölder homéomorphe à une variété. Cet exemple montre en particulier que dans le cas des limites à courbure de Ricci minorée, l'inclusion $\mathcal{R} \subset U_\varepsilon$ est en général stricte.

D'après la convergence du volume et le théorème 9.69 des notes de Cheeger, 2001, si la densité en x est proche de 1, alors une boule unité centrée en x est (n,ε)-symétrique. La construction de cartes bi-Hölder entre des boules de U_ε et $\mathbb{R}^n$ repose alors sur le résultat suivant, qui se trouve dans la section « Reifenberg's method » du chapitre 9 des notes de Cheeger, 2001, et dans les théorèmes A.1.1 et A.1.2 de l'article de Cheeger et Colding, 1997.

Théorème 2.13. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\varepsilon_0(n)$ et $\alpha(\varepsilon) \in]0,1[$ tels que pour tout espace limite (X,d,p), tout $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$ et tout point x tel que*

$$\mathrm{d_{GH}}(B_2(x), \mathbb{B}^n_2) < \varepsilon, \tag{2}$$

il existe une application $\varphi : B_1(x) \to \mathbb{B}^n_1$ telle que

1. *$\varphi(B_1(p))$ contient une boule $\mathbb{B}_r$, $r = 1-\psi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon) \to 0$ quand ε tend vers 0 ;*
2. *φ est un homéomorphisme $\alpha(\varepsilon)$-bi-Hölder entre $B_1(p)$ et son image, c'est-à-dire pour tout $y,z \in B_1(x)$: $C^{-1}d(y,z)^{\alpha(\varepsilon)} \leq \|\varphi(y)-\varphi(z)\| \leq Cd(y,z)^{\alpha(\varepsilon)}$. De plus $\alpha(\varepsilon) \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Pour passer de l'inégalité (2) à l'existence d'un homéomorphisme bi-Hölder, J. Cheeger et T. H. Colding se sont inspirés des travaux de E. G. Reifenberg : si la GH-proximité à une boule euclidienne $\mathbb{B}^n_r$ est vraie non seulement à l'échelle 2, mais aussi à toutes les échelles r plus petites, nous disons que la boule $B_2(p)$ satisfait la propriété de Reifenberg. Il est alors possible d'obtenir l'homéomorphisme recherché avec une construction originairement due à Reifenberg, 1960 (voir aussi les notes de Naber, 2020). L'élément clef dans la démonstration du théorème précédent consiste donc à démontrer la propagation aux échelles plus petites de la GH-proximité, ce qui est résumé par le résultat suivant (voir le Théorème 9.73 des notes de Cheeger, 2001, et le Théorème 4.3 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème 2.14. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, dépendant de ε, n et v, tel que pour toute variété lisse (M^n, g) avec $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$, si $B_4(p)$ est (n,δ)-symétrique, alors toute boule $B_r(x) \subset B_3(p)$ est (n,ε)-symétrique.*

Dans la suite de ce texte, nous allons retrouver ce principe : une certaine propriété, vraie pour une échelle fixée, doit être propagée aux échelles inférieures, sous les bonnes hypothèses et avec souvent beaucoup de travail (voir les sections 4.2 et 5.1).

2.5. Courbure de Ricci bornée

Si (X, d, p) est la limite d'une suite de variétés (M_i^n, g_i, p_i) telles que $\| \operatorname{Ric}_{g_i} \| \leq (n-1)$ et $\operatorname{vol}(B_1(p_i)) > 0$, on dispose d'informations supplémentaires sur l'ensemble régulier, grâce au résultat suivant de « ε-régularité », dû à M. Anderson, qui concerne le rayon harmonique (voir la définition 2.9 dans l'article de Cheeger et Naber, 2015).

Théorème 2.15 (Lemme 2.2, Anderson, 1990). — *Il existe $\varepsilon(n, v)$ tel que pour toute variété (M^n, g) telle que $\| \operatorname{Ric}_g \| \leq \varepsilon$ et $\operatorname{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$, si*

$$\operatorname{vol}_g(B_r(p)) \geq (1-\varepsilon)\omega_n r^n, \tag{3}$$

alors le rayon harmonique vérifie $r_h(p) \geq r/2$.

La continuité du volume prouvée par T. H. Colding assure qu'on peut remplacer (3) par une hypothèse de (n, ε)-symétrie de la boule $B_r(p)$.

Une des conséquences du théorème précédent est que si $\varepsilon \leq \varepsilon(n, v)$ et $x \in X$ appartient à l'ensemble U_ε donné par le théorème A, alors x est un point régulier : par continuité du volume, il est en effet la limite de points x_i qui satisfont (3) et dont le rayon harmonique ne tend par vers 0. Par conséquent, l'ensemble régulier $\mathcal{R}$ coïncide avec l'ouvert U_ε. En particulier, dans le cas de courbure de Ricci bornée, des situations comme celle de l'exemple 1.2 ne peuvent pas se produire, car l'ensemble régulier est ouvert. Le théorème de ε-régularité joue également un rôle important dans la démonstration de la conjecture de la codimension 4 de J. Cheeger et A. Naber (voir la section 5.1).

3. LA STRATIFICATION QUANTITATIVE

Un des outils importants dans les travaux de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber est la *stratification quantitative*. D'un point de vue purement géométrique, nous pouvons considérer l'affirmation « x appartient à $S^k(X)$ » comme une propriété de rigidité pour les cônes tangents en x : ils ne possèdent pas $k+1$ symétries. Les strates quantitatives ont comme but de « quantifier » combien les cônes tangents sont loin de posséder $(k+1)$ symétries. Cela permet d'obtenir des informations analytiques et géométriques plus fines que celles qui peuvent être déduites de la stratification classique.

La stratification quantitative a été introduite dans le cadre des espaces limites dans l'article de Cheeger et Naber, 2013a, qui s'inspire des travaux précédents de Cheeger, 2012, et de Cheeger et Naber, 2013b, ce dernier concernant les applications harmoniques. Les techniques liées à la stratification quantitative ont été utilisées dans de nombreux travaux, à la fois dans le contexte des limites de variétés dans tous les travaux successifs de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, et dans ceux de Bamler, 2017, et

Bamler, 2018, dans le cadre des espaces métriques mesurés avec des bornes synthétiques ou d'Alexandrov sur la courbure, par exemple dans les travaux de Mondino et Naber, 2019, Antonelli, Brué et Semola, 2019 et Li et Naber, 2020, et dans l'étude des solutions d'équations différentielles géométriques. Nous pouvons citer par exemple les articles de Cheeger, Haslhofer et Naber, 2013 ; Cheeger, Haslhofer et Naber, 2015 ; Naber et Valtorta, 2017b ; Naber et Valtorta, 2017a ; Naber et Valtorta, 2019 ; Naber, Valtorta et Veronelli, 2019 ; Breiner et Lamm, 2015 ; Focardi, Marchese et Spadaro, 2015 ; De Lellis, Marchese, Spadaro et Valtorta, 2018 ; Edelen et Engelstein, 2019.

Les strates quantitatives sont définies comme suit :

Définition 3.1 ((ε,r)-strates quantitatives). — *Soit (X,d,p) un espace métrique pointé. Pour $\varepsilon,r>0$ et $k\in\mathbb{N}$, on définit :*

$$S^k_{\varepsilon,r}(X)=\{x\in B_1(p)\ \textit{t.q. pour tout}\ s\in[r,1[,B_s(x)\ \textit{n'est pas}\ (k+1,\varepsilon)\textit{-symétrique}\}.$$

La k-ième (ε,r)-strate quantitative autour de p est alors $\Sigma^k_{\varepsilon,r}(X)=S^k_{\varepsilon,r}(X)\setminus S^{k-1}_{\varepsilon,r}(X)$, où nous posons $S^{-1}_{\varepsilon,r}(X)=\emptyset$.

Les propriétés suivantes des (ε,r)-strates quantitatives découlent immédiatement de la définition :

$$S^k_{\varepsilon,r}(X)\subset S^k_{\varepsilon,R}(X)\quad\text{si } r\le R,\qquad S^k_{\eta,r}(X)\subset S^k_{\varepsilon,r}(X)\quad\text{si }\varepsilon\le\eta.$$

Définition 3.2 (ε-strates quantitatives). — *Soit (X,d) un espace métrique. Pour $\varepsilon>0$ et $k\in\mathbb{N}$ nous définissons :*

$$S^k_{\varepsilon}(X)=\{x\in B_1(p)\ \textit{t.q. pour tout}\ r\in]0,1[,B_r(x)\ \textit{n'est pas}\ (k+1,\varepsilon)\textit{-symétrique}\}.$$

De façon équivalente :

$$S^k_{\varepsilon}(X)=\bigcap_{r>0}S^k_{\varepsilon,r}(X).$$

La k-ème ε-strate quantitative est alors $\Sigma^k_{\varepsilon}(X)=S^k_{\varepsilon}(X)\setminus S^{k-1}_{\varepsilon}(X)$, où nous posons $S^{-1}_{\varepsilon}(X)=\emptyset$.

Nous avons la relation suivante entre strates classiques et quantitatives :

Lemme 3.3. — *Soit (X,d,p) un espace limite d'une suite de variétés non effondrées à courbure de Ricci uniformément minorée. Alors*

$$S^k(X)\cap B_1(p)=\bigcup_{\varepsilon>0}S^k_{\varepsilon}(X).$$

Grâce à ce lemme, les résultats sur les strates quantitatives permettent d'obtenir des informations sur les strates classiques.

3.1. Exemples de strates quantitatives

Commençons par donner des exemples de strates quantitatives dans des cas simples. Notons en particulier que même pour une variété lisse (M^n, g), $S^k_{\varepsilon,r}(M)$ n'est pas nécessairement vide. En effet, considérons le complémentaire de $S^k_{\varepsilon,r}(M)$:

$$(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c = \{x \in B_1(p) \text{ t.q. } \exists s \in [r, 1[\text{ t.q. } B_s(x) \text{ est } (k+1, \varepsilon)\text{-symétrique } \}.$$

Pour un point $x \in M^n$ et $\varepsilon > 0$ fixés, il existe toujours un rayon $r_0(\varepsilon, x)$ assez petit pour que la boule $B_{r_0}(x)$ soit (n, ε)-symétrique, et donc tel que $x \in (S^k_{\varepsilon,r_0}(M))^c$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Mais si r_0 est strictement inférieur à l'échelle fixée r, il se peut que x n'appartienne pas à $(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c$. Par conséquent, $(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c$ ne coïncide pas nécessairement avec la totalité de la variété M^n, et $S^k_{\varepsilon,r}(M)$ peut être non vide (voir également l'exemple 3.7).

Exemple 3.4. — Considérons un cône de dimension 2, $X = C(\mathbb{S}^1_\alpha)$. Dans ce cas il n'y a qu'une seule strate singulière $S(X) = S^0(X)$ constituée du sommet du cône. Nous omettrons donc l'indice 0 dans la suite. Nous commençons par décrire une ε-strate quantitative $S_\varepsilon(X)$.

On observe tout d'abord que l'angle du cône $\alpha \leq 2\pi$ détermine la proximité de X au plan euclidien $\mathbb{R}^2$: pour un angle α très proche de 2π, les boules $B_s(o)$ centrées au sommet sont GH-proches d'une boule euclidienne. Néanmoins, un cône d'angle strictement inférieur à 2π n'est pas isométrique à $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de l'angle tel que pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, les boules $B_s(0)$ sont $(2, \varepsilon)$-symétriques, donc le sommet o n'appartient pas à S_ε ; pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, les boules $B_s(o)$ ne sont pas $(2, \varepsilon)$-symétriques et $o \in S_\varepsilon$. De plus, en dehors du sommet, X est une variété lisse. Ainsi, comme observé ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X \setminus \{o\}$ il existe $r_0(d(x, o), \varepsilon)$ tel que pour tout $r \leq r_0$, $x \notin S_{\varepsilon,r}(X)$. Il y a donc deux possibilités pour l'ensemble S_ε : si $\varepsilon > \varepsilon_0$, S_ε est vide, sinon il coïncide avec le sommet du cône.

Le même argument s'applique à un cône $C(M)$ sur une variété lisse (M^n, g) de diamètre inférieur ou égal à π et aux produits $\mathbb{R}^k \times C(M)$.

Exemple 3.5. — Considérons les espaces introduits dans l'exemple 1.2. L'ensemble singulier $S^0(Z^2_i)$ est constitué par un nombre fini de points, les sommets $z_1, \dots, z_N$. En argumentant comme dans l'exemple précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe trois possibilités pour l'ε-strate singulière, dépendant des angles aux sommets : $S_\varepsilon(Z^2_i)$ peut être vide, constituée d'un sous-ensemble de $S(Z^2_i)$ dépendant des angles aux sommets z_j, ou coïncider avec $S(Z^2_i)$.

Exemple 3.6. — Reprenons $X = C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ comme dans l'exemple 3.4 et décrivons une (ε, r)-strate quantitative $S_{\varepsilon,r}(X)$ pour $\varepsilon, r > 0$ fixés.

Supposons que la boule unité $B_1(o)$ du cône n'est pas 2ε-proche de la boule euclidienne $\mathbb{B}^2_1$:

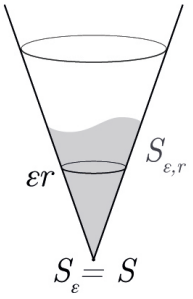
$$\mathrm{d_{GH}}(B_1(o), \mathbb{B}^2_1) \geq 2\varepsilon.$$

Puisque le cône est invariant par homothétie, pour tout $s > 0$

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s) \geq 2\varepsilon s,$$

donc aucune boule centrée au sommet n'est $(2, 2\varepsilon)$-symétrique.
Montrons alors que

$$B_{\varepsilon r}(o) \subset S_{\varepsilon,r}(X).$$



Pour $x \in X$ tel que $d(x, o) < \varepsilon r$ et pour $s \in [r, 1[$, on a

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x)) = d(x, o) < \varepsilon r \leq \varepsilon s.$$

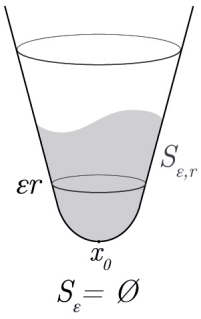
Or, pour tout s la boule $B_s(o)$ n'est pas $(2, 2\varepsilon)$-symétrique. Si $B_s(x)$ était $(2, \varepsilon)$-symétrique, l'inégalité triangulaire impliquerait :

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s(0)) \leq \mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x), \mathbb{B}^2_s(0)) < 2\varepsilon s.$$

On en déduit que si $x \in B_{\varepsilon r}(o)$, pour tout $s \in [r, 1[$ la boule $B_s(x)$ n'est pas $(2, \varepsilon)$-symétrique, ce qui signifie $x \in S_{\varepsilon,r}(X)$. Par conséquent, $B_{\varepsilon r}(o) \subset S_{\varepsilon,r}(X)$.

De la même façon on peut montrer que pour un produit $X = \mathbb{R}^k \times C(M)$, où M est une variété lisse de diamètre strictement inférieur à π, pour ε assez petit dépendant du diamètre de M, l'(ε, r)-strate quantitative contient un voisinage tubulaire de taille εr de $S^k(X)$: $B_{\varepsilon r}(S^k(X)) \subset S^k_{\varepsilon,r}(X)$.

Exemple 3.7. — Fixons $\varepsilon, r > 0$, considérons un cône $X = C(\mathbb{S}^1_a)$ tel que $B_1(o)$ n'est pas (4ε)-proche de la boule euclidienne $\mathbb{B}^2_1$. Soit (M^2, g, x_0) une surface lisse approchant X, comme dans l'exemple 1.1, telle que $\mathrm{d_{GH}}((M, g, x_0), (C(\mathbb{S}^1_a), d, o)) < 2\varepsilon r$.



Montrons que la boule $B_{\varepsilon r}(x_0)$ est alors incluse dans $S_{\varepsilon,r}(M)$: en particulier, cela donne un exemple concret d'(ε, r)-strate quantitative non-vide dans une variété lisse.
On commence par observer que, puisque $B_s(o)$ n'est $(2, 4\varepsilon)$-symétrique pour aucun rayon $s \in [r, 1[$, de même $B_s(x_0)$ n'est pas $(2, 2\varepsilon)$-symétrique. En effet, si elle l'était on aurait :

$$\begin{aligned}\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s(0)) &\leq \mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x_0)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), \mathbb{B}^2_s(0)) \\ &< 2\varepsilon r + 2\varepsilon s < 4\varepsilon s.\end{aligned}$$

Soit $x \in B_1(x_0)$ tel que $d(x, x_0) < \varepsilon r$. S'il existait $s \in [r, 1[$ tel que $B_s(x)$ était $(2, \varepsilon)$-symétrique on aurait :

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), \mathbb{B}^2_s(0)) \leq \mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), B_s(x)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x), \mathbb{B}^2_s(0)) < \varepsilon r + \varepsilon s \leq 2\varepsilon s.$$

Donc si $d(x, x_0) < \varepsilon r$, il n'existe pas $s \in [r, 1[$ telle que la boule $B_s(x)$ soit $(2, \varepsilon)$-symétrique. Cela implique $B_{\varepsilon r}(x_0) \subset S_{\varepsilon,r}(M)$. En particulier, $S_{\varepsilon,r}(M)$ est non vide.

3.2. Estimées de volume sur les strates quantitatives

Le théorème B, qui affirme la k-rectifiabilité des strates classiques S^k et la k-symétrie $\mathcal{H}^k$-presque partout des cônes tangents aux points de S^k, est une conséquence directe du lemme 3.3 et du théorème suivant.

THÉORÈME 3.8 (Théorèmes 1.7 et 1.9 de CHEEGER, JIANG et NABER, 2021)
Soit (X, d, x) un espace limite d'une suite de variétés (M_i^n, g_i, x_i) telles que $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(x_i)) > v > 0$ et dont la courbure de Ricci est uniformément minorée par $-(n-1)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c(n, v, \varepsilon)$ telle que pour tout $r \in]0, 1[$

$$\mathrm{vol}(B_r(S^k_{\varepsilon,r}(X)) \cap B_1(p)) \leq cr^{n-k} \text{ et } \mathrm{vol}(B_r(S^k_{\varepsilon}(X)) \cap B_1(p)) \leq cr^{n-k}. \tag{4}$$

En particulier la $\mathcal{H}^k$-mesure de $S^k_\varepsilon(X)$ est localement finie. De plus, la k-ième ε-strate quantitative $\Sigma^k_\varepsilon(X)$ est k-rectifiable et pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in S^k_\varepsilon(X)$, tous les cônes tangents en x sont k-symétriques.

Ce théorème montre que les strates quantitatives se comportent « mieux » que les strates classiques : ainsi, s'il existe des exemples où la mesure $\mathcal{H}^k$ de $S^k(X) \cap B_1(p)$ est infinie, la mesure de $S^k_\varepsilon(X)$ est toujours localement finie. Revenons sur l'exemple de la surface infiniment singulière pour illustrer ce fait.

Exemple 3.9. — Considérons l'espace limite $X = Z^2_\infty$ construit dans l'exemple 1.2. Comme il a été observé, l'ensemble singulier $\mathcal{S} = S^0(X)$ est constitué d'un nombre infini de points et il est dense dans X. Le théorème précédent affirme néanmoins que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $p \in X$, la boule $B_1(p)$ contient un nombre fini de points appartenant à la ε-strate quantitative. En effet, d'après la remarque 2.12, en dehors d'un nombre fini de points $\{x_1, \ldots, x_N\}$, la densité est proche de 1. Par conséquent, d'après CHEEGER (2001, Théorème 9.69), si $x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$, il existe un rayon r tel que $B_r(x)$ est $(2, \varepsilon)$-symétrique et donc $x \notin S_\varepsilon(X)$. Cela implique que $S_\varepsilon(X)$ est constitué au plus d'un nombre fini de points.

Une autre conséquence du théorème 3.8 est que pour $\mathcal{H}^k$-presque tout point de la strate classique $S^k(X)$ les cônes tangents sont k-symétriques. Le phénomène pathologique des cônes tangents j-symétriques pour tous les entiers $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ illustré par l'article de COLDING et NABER, 2013, ne peut donc avoir lieu que pour un ensemble de points de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle.

Les estimées de volume (4) affirment que le comportement « en volume » des strates quantitatives, et donc aussi des strates classiques, est analogue à celui d'une sous-variété de dimension k. En effet, si (M^n, g) est une variété lisse et N^k est une sous-variété de dimension k, le volume d'un voisinage tubulaire de N de taille r est contrôlé par r^{n-k}. Néanmoins, des exemples donnés dans le théorème 1.7 et la section 7 de l'article de LI et NABER, 2020, montrent que la k-ième strate classique Σ^k ne possède pas toujours de structure de variété k-dimensionnelle.

Des estimées de volume plus faibles, avec un contrôle en $C(\eta, n, v, \varepsilon)r^{n-k-\eta}$ pour tout $\eta > 0$, avaient été prouvées par CHEEGER et NABER, 2013a. Ce contrôle avait pu être

amélioré en r^{n-k} uniquement dans le cas de courbure de Ricci bornée et $k = n - 4$: en effet, le théorème 1.14 de l'article de Jiang et Naber, 2021, implique le contrôle du volume en r^4 pour les strates quantitatives de codimension 4.

Ces estimées plus faibles avaient été utilisées pour démontrer que si (M^n, g) est une variété telle que $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0$ et dont la courbure de Ricci est bornée $\| \mathrm{Ric}_g \| \leq (n-1)$, alors pour tout $q < 1$ la norme L^q de la courbure de Riemann est bornée par une constante $C(n, v, q)$ (voir le corollaire 1.26 dans l'article de Cheeger et Naber, 2013a). La démonstration de la conjecture de la codimension 4 par les mêmes auteurs leur a permis d'améliorer ce dernier résultat dans le théorème 1.8 de Cheeger et Naber, 2015, en obtenant, toujours à partir des estimées de volume, des bornes L^q pour la courbure de Riemann pour tout $q < 2$.

4. QUELQUES ÉLÉMENTS DE LA PREUVE DU THÉORÈME 3.8

La démonstration du théorème 3.8 combine des éléments classiques de la théorie de Cheeger–Colding (en particulier le théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique », voir théorème 2.11) avec deux nouveaux résultats marquants sur la géométrie des espaces limites : un théorème de décomposition en *régions collier* et un théorème de structure de ces mêmes régions.

Les régions collier permettent d'obtenir des informations sur une strate quantitative $S^k_{\varepsilon,r}$ et sur son voisinage tubulaire, en se plaçant dans des boules qui intersectent $S^k_{\varepsilon,r}$ de façon appropriée. Ces boules possèdent un sous-ensemble $\mathcal{C}$ « approchant » la strate quantitative, dans le sens que nous allons voir ci-dessous. Le théorème de décomposition assure que des régions collier existent et permet alors de prouver qu'une boule unité se décompose en deux types de boules : celles qui contiennent une région collier et des boules $(k+1, 2\varepsilon)$-symétriques, dont les centres sont assez loin de la strate S^k_ε. De plus, la mesure k-dimensionnelle de l'ensemble de ces deux types de boules est contrôlée. Le théorème de structure permet d'obtenir des informations supplémentaires sur les boules qui contiennent une région collier, en particulier la k-Ahlfors régularité de la mesure qui lui est associée. Celle-ci, avec le contrôle de la mesure k-dimensionnelle donné par le théorème de décomposition, permet d'obtenir la démonstration des estimées de volume du théorème 3.8.

Nous allons nous concentrer principalement sur le théorème de structure des régions collier. Nous renvoyons aux sections 2.4 et 10 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, pour les démonstrations respectivement du théorème 3.8 et du théorème de décomposition. Dans le reste de cette section, nous présentons les régions collier, puis un schéma de la preuve du théorème de structure. Nous présentons également certains des résultats intervenant dans cette démonstration, qui constitue la majorité du même article des trois auteurs.

4.1. Régions collier et théorème de structure des régions collier

Les régions collier ont été introduites dans le cadre des espace limites dans l'article de Jiang et Naber, 2021. Des versions antérieures de cette notion peuvent se retrouver dans les travaux de Naber et Valtorta, 2017b, section 3.7 ; de Naber et Valtorta, 2017a, section 8, ou de Naber et Valtorta, 2019, sections 9 et 11. Dans les trois cas, il s'agit de donner des théorèmes de décomposition en régions appropriées. La démonstration du nombre fini de types de difféomorphismes pour les variétés de dimension 4, contenue dans la section 8 de l'article de Cheeger et Naber, 2015, se sert également d'un théorème de décomposition en bulles, appelées « colliers » et « corps », spécifique à la dimension 4. Nous nous référons dans la suite à la définition 2.4 de région collier donnée dans l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021.

Définition 4.1 (Région collier et mesure associée). — *Soient (X, d, p) un espace limite, $k \in \{0, \dots, n-2\}$ et $\delta, \varepsilon > 0$. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_+ \subset B_2(p)$ tel que $p \in \mathcal{C}$. Soit $x \mapsto r_x$ une fonction continue de $\mathcal{C}$ dans $[0, 1[$ telle que $r_x > 0$ si $x \in \mathcal{C}_+$, $r_x = 0$ si $x \in \mathcal{C}_0$. L'ensemble*

$$\mathcal{N} = B_2(p) \setminus \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \bar{B}_{r_x}(x).$$

est une (k, δ, ε)-région collier si les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) *Les boules $\{B_{10^{-3}r_x}(x), x \in \mathcal{C}\}$ sont disjointes. En particulier, $\mathcal{C}_+$ est discret.*
(b) *$|\mathcal{V}_{\delta^{-1}r_x}(x) - \mathcal{V}_{\delta r_x}(x)| \leq \delta^2$, où $\mathcal{V}$ est le rapport de volumes défini par (1).*
(c) *Pour tout $x \in \mathcal{C}$ et pour tout $s \in [r_x, \delta^{-1}[$, la boule $B_s(x)$ est (k, δ^2)-symétrique mais pas $(k+1, \varepsilon)$-symétrique.*
(d) *Si $r \geq r_x$ et $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$ et φ est une (εr)-presque isométrie entre $B_r^{\mathbb{R}^k \times C(Z)}(0^k, o)$ et $B_r(x)$, la distance de Hausdorff entre $B_{2r}(x) \cap \mathcal{C}$ et l'image des sommets $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{o\})$ est inférieure à $10^{-2}r$.*
(e) *La constante de Lipschitz de $x \mapsto r_x$ est inférieure à δ.*

La mesure μ associée à la région collier $\mathcal{N}$ est définie par

$$\mu = \mathcal{H}^k|_{\mathcal{C}_0} + \sum_{x \in \mathcal{C}_+} r_x^k \delta_x.$$

Nous nous référons à $\mathcal{C}$ comme l'ensemble des centres, en rouge dans la figure ci-dessous. Cet ensemble joue le rôle d'approximation de la strate quantitative $S^k_\varepsilon(X)$. En effet, la condition (c) implique que tout $x \in \mathcal{C}_0$ est inclus dans $S^k_\varepsilon(X)$ et qu'il existe un rayon r, la borne supérieure des rayons r_x, tel que tout $x \in \mathcal{C}_+$ appartient à $S^k_{\varepsilon,r}(X)$. La condition (d) nous dit de plus que $\mathcal{C}$ est proche de $S^k_\varepsilon(X)$.

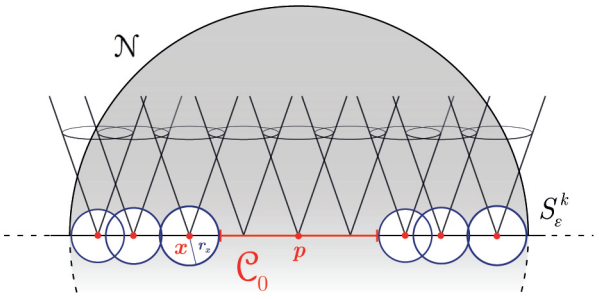


FIGURE 1. En gris, une région collier simple, où S^k_ε coïncide avec S^k.

Une région collier peut également être définie dans une variété lisse (M^n, g) : dans ce cas, puisque les ε-strates quantitatives sont vides, l'ensemble des centres $\mathcal{C}$ est constitué seulement de sa partie discrète $\mathcal{C}_+$ et la mesure μ est une somme de masses de Dirac. Le théorème de structure des colliers, énoncé dans le théorème 2.9 de l'article de CHEEGER, JIANG et NABER, 2021, affirme ce qui suit.

THÉORÈME 4.2 (Théorème de structure des colliers). — *Soient $\varepsilon, v > 0$. Il existe $\delta_0(n, v, \varepsilon)$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_0(n, v, \varepsilon)$, si (X, d, p) est un espace limite d'une suite de variétés non effondrées qui vérifient $\mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0$ et $\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1)$, et si $\mathcal{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, ε)-région collier, alors :*

1. *La mesure μ est k-Ahlfors régulière, c'est-à-dire il existe une constante $A(n)$ telle que pour tout $x \in \mathcal{C}$ et tout $r \geq r_x$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$ on ait*
$$A(n)^{-1} r^k \leq \mu(B_r(x)) \leq A(n) r^k. \tag{A}$$
2. *$\mathcal{C}_0$ est k-rectifiable.*

4.2. Structure de la preuve du théorème 4.2

La preuve du théorème de structure des colliers occupe les sections de 5 à 9 de l'article de CHEEGER, JIANG et NABER, 2021. Nous en résumons ici les grandes étapes.

Il est tout d'abord possible de séparer la démonstration du théorème 4.2 en deux parties :

1. La démonstration du théorème pour une région collier dans une variété lisse.
2. La démonstration dans le cas des espaces limites, à partir du cas lisse.

Pour ce qui concerne le deuxième point, les auteurs prouvent un résultat d'approximation des régions collier singulières par des régions collier lisses, ainsi que la rectifiabilité de $\mathcal{C}_0$, ce qui permet de conclure (voir les sections 9.5 et 9.6 de l'article sus-cité).

Les difficultés principales résident dans la démonstration du théorème dans le cas lisse. Pour se former une première idée intuitive, considérons une boule euclidienne $\mathbb{B}^k_2$ dans $\mathbb{R}^k$ et un sous-ensemble $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_0 \cup \mathcal{C}'_+$ muni d'une fonction rayon $x \mapsto r_x$ de $\mathcal{C}'$ dans

$[0,1[$, strictement positive sur $\mathcal{C}'_+$, telle que les boules $\{\mathbb{B}_{r_x}(x), x \in \mathcal{C}'_+\}$ soient disjointes et la réunion $\{\mathbb{B}_{r_x}(x), x \in \mathcal{C}'_+\} \cup \mathcal{C}'_0$ recouvre $\mathbb{B}^k_2$. En considérant la mesure associée

$$\mu' = \mathcal{H}^k|_{\mathcal{C}'_0} + \sum_{x \in \mathcal{C}'_x} r_x^k \delta_x,$$

on peut montrer que μ' est k-Ahlfors régulière sur $\mathcal{C}'$, dans le sens de (A). La démonstration de l'Ahlfors régularité se fonde alors sur le fait de trouver une fonction u de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^k$ possédant les propriétés de régularité adéquates, ce qui permet d'exploiter la situation plus simple de l'espace euclidien. En gardant cela à l'esprit, nous pouvons identifier trois étapes principales dans la démonstration du théorème de structure dans le cas lisse :

1. Montrer l'existence d'une application bi-Hölder $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^k$ (section 7 de l'article).
2. Sous une hypothèse supplémentaire, montrer qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$ sur lequel u est $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz (sections 9.1 et 9.3).
3. Se servir d'un raisonnement par récurrence pour ôter l'hypothèse supplémentaire et conclure (sections 9.3 et 9.4).

Dans la suite de cette section, nous allons présenter certaines des idées qui interviennent dans la construction de l'application $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^k$, en nous concentrant sur des points communs à la théorie de Cheeger–Colding et aux deux autres articles de Cheeger et Naber, 2015, et de Jiang et Naber, 2021.

4.3. Propagation d'une propriété aux échelles inférieures

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3, si (X, d, p) est un espace limite et p est un point de l'ensemble régulier $\mathcal{R}$, il est possible de construire une application bi-Hölder d'une boule $B_1(p)$ dans une boule euclidienne $\mathbb{B}^n_1$. Une étape préalable pour démontrer l'existence d'une telle application bi-Hölder consiste à obtenir une propriété de Reifenberg, c'est-à-dire le propagation de la GH-proximité d'une échelle fixée à toutes les échelles inférieures et à tous les points x de la boule $B_1(p)$.

Une idée similaire entre en jeu dans la construction d'une application bi-Hölder de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^k$. Pour une boule $B_2(p)$ qui contient une région collier, en partant d'une propriété vraie à l'échelle 2, J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber montrent qu'il est possible d'obtenir cette même propriété sur (beaucoup de) boules centrées en un point x de l'ensemble des centres, pour toutes les échelles $r \in [r_x, 1]$ telles que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$.

Plus précisément, considérons une (k, δ, η)-région collier $\mathcal{N}$. Grâce à la condition (c) dans la Définition 4.1, pour δ assez petit, par exemple inférieur à $1/8$, la boule $B_8(p)$ est (k, δ^2)-symétrique. De plus, la proposition 2.5 assure que pour tout $\delta' > 0$, si δ est inférieur à $\delta(n, \delta')$, il existe un (k, δ')-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$. Ce dernier restreint à $\mathcal{C}$ est le candidat pour l'application bi-Hölder recherchée.

Pour obtenir les informations nécessaires sur la régularité de l'application u, les auteurs visent à montrer que l'on peut choisir δ' et δ de façon à ce que u reste un (k, ε)-splitting pour le même $\varepsilon > 0$ fixé, sur toutes les boules $B_r(x)$ avec $x \in \mathcal{C}$ et $r \in [r_x, 1]$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$. Si cela était vrai pour tous les points de l'ensemble des centres,

alors u serait bi-Lipschitz sur $\mathcal{C}$, comme le montrent le lemme 9.6 et la preuve de la proposition 9.3 dans l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021. Or, les auteurs fournissent un exemple où u n'est pas bi-Lipschitz sur tout l'ensemble $\mathcal{C}$ (voir l'exemple 1 dans la section 3 du même article).

Il montrent alors que, même si u n'est pas nécessairement un (k,ε)-splitting harmonique sur les boules $B_r(x)$, $x \in \mathcal{C}$, il existe toujours une transformation linéaire $T_{x,r}$ de $\mathbb{R}^k$ telle que la composition $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est bien un (k,ε)-splitting. Plus précisément, J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber démontrent, dans la section 7 de leur article, un théorème de transformation qui, combiné avec le dernier point de leur proposition 9.3, peut être énoncé de la façon suivante.

Théorème 4.3 (Théorème de transformation). — *Fixons $\varepsilon, \eta, v > 0$. Il existe $\delta_0(n, v, \varepsilon, \eta)$, tel que pour tout $\delta \leq \delta_0(n, v, \varepsilon, \eta)$, si*

1. *(M^n, g) est une variété avec $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta^2$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$;*
2. *$\mathcal{N} \subset B_2(p)$ est une (k,δ,η)-région collier ;*
3. *$u : B_4(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k,δ)-splitting harmonique,*

alors pour tout $x \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \in [r_x, 1]$ il existe une matrice $k \times k$ triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que l'application

$$T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$$

est un (k,ε)-splitting harmonique. De plus, $\|T_{x,r}\| \leq r^{-\varepsilon}$ et $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^k$ est bi-Hölder : pour tout $y, z \in B_r(x)$

$$(1-\varepsilon)d(y,z)^{1+\varepsilon} \leq \|u(z) - u(y)\| \leq (1+\varepsilon)d(y,z).$$

Nous allons donner quelques précisions sur la démonstration du théorème de transformation dans la dernière section de ce texte. En choisissant $k = n$, ce résultat fournit une nouvelle preuve du théorème 2.13 : si une boule $B_4(p)$ est GH-proche d'une boule euclidienne $\mathbb{B}^n_4$, alors il existe une application harmonique et bi-Hölder sur $B_1(p)$ (voir la section 7.5 del'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Pour montrer la régularité bi-Lipschitz de u sur un sous-ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$, les auteurs utilisent le schéma de preuve suivant : ils supposent une régularité Ahlfors plus faible pour μ, c'est-à-dire avec une constante B qui, à la différence de la constante $A(n)$ du théorème 4.2, n'est pas universelle. Avec cette hypothèse supplémentaire, ils démontrent le théorème suivant, qui correspond à leur proposition 9.3, sauf pour le cinquième point, que nous avons intégré au théorème précédent, car sa démonstration ne se sert pas de l'hypothèse de régularité Ahlfors faible.

Théorème 4.4. — *Fixons $\varepsilon, \eta, B, v > 0$. Il existe $\delta_0'(n, v, \eta, B)$ tel que pour tout $\delta' \leq \delta_0'$ il existe $\delta_0(n, v, \eta, v, \delta')$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$, si :*

1. *(M^n, g) est une variété avec $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$;*
2. *$\mathcal{N} \subset B_2(p)$ est une (k,δ,η)-région collier ;*
3. *pour tout $x \in \mathcal{C}$ et $r \geq r_x$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$*

$$B^{-1} r^k \leq \mu(B_r(x)) \leq B r^k; \tag{AF}$$

4. $u : B_4(p) \to \mathbb{R}^k$ *est un* (k, δ')*-splitting harmonique,*

alors il existe $\mathcal{C}_\varepsilon \subset \mathcal{C} \cap B_{15/8}(p)$ *tel que :*

(a) $\mu(\mathcal{C}_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)\mu(\mathcal{C} \cap B_{15/8}(p))$.

(b) *Pour tout* $x \in \mathcal{C}_\varepsilon$ *et pour tout* $r \geq r_x$ *avec* $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$, $u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ *est un* (k, ε)*-splitting harmonique.*

(c) $u : \mathcal{C}_\varepsilon \to \mathbb{R}^k$ *est* $(1+\varepsilon)$*-bi-Lipschitz :*

$$(1+\varepsilon)^{-1} d(x,y) \leq \|u(x) - u(y)\| \leq (1+\varepsilon) d(x,y)$$

En d'autres termes, quitte à se restreindre à un sous-ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$, la matrice de transformation $T_{x,r}$ est l'identité et l'application u elle même, sans besoin de la composer avec une transformation linéaire, est un (k, ε)-splitting sur les boules centrées en $x \in \mathcal{C}_\varepsilon$. La démonstration de ce dernier théorème nécessite plusieurs résultats intermédiaires, qui occupent les sections de 6 à 8 de l'article.

Sous les hypothèses du théorème 4.4, la k-Ahlfors régularité découle des deux résultats précédents et est démontrée dans le lemme 9.11 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021 : les auteurs se servent de la régularité bi-Lipschitz pour la borne inférieure dans (A), et pour la borne supérieure ils utilisent un argument de recouvrement combiné avec le contrôle Hölder sur les matrices de transformation donné par le théorème 4.3.

4.4. Contrôle de la géométrie et de l'analyse via une quantité monotone

Un point commun entre la théorie de Cheeger–Colding et d'autres problèmes d'analyse géométrique est l'utilisation d'une quantité monotone pour contrôler des propriétés de régularité et de symétrie des boules. Ce principe, illustré brièvement dans la section 2.5, joue un rôle significatif dans la démonstration du théorème 4.4.

Le théorème 2.11 « presque cône en volume implique presque cône métrique » et ses versions successives prouvées par J. Cheeger et A. Naber affirment qu'un contrôle approprié du pincement du rapport de volume implique la GH-proximité à un cône métrique ou à un modèle $\mathbb{R}^k \times C(Z)$, et en particulier l'existence d'une application de splitting. Une des étapes importantes dans le travail de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, pour prouver le théorème 4.4 consiste à montrer que, en remplaçant le pincement du volume par une quantité monotone mieux choisie, il est possible de gagner en régularité sur le splitting (en particulier avec un contrôle sur son hessien).

Pour ce faire, les auteurs utilisent l'entropie locale pointée $\mathcal{W}$, inspirée par la $\mathcal{W}$-entropie de G. Perelman, et qui, comme le rapport de volumes, est décroissante. Ils définissent également une notion de k-pincement de $\mathcal{W}$ afin que, si le k-pincement est proche de 0 en un point p à une échelle r, alors il existe un splitting harmonique de $B_r(p)$ dans $\mathbb{R}^k$ (voir la section 4.6 de l'article). En combinant un théorème de splitting optimal et un théorème de transformation amélioré par rapport à l'énoncé ci-dessus, montrés respectivement dans les sections 6 et 7 de l'article, ils prouvent que le contrôle du k-pincement permet de choisir un splitting qui reste un (k, ε)-splitting à toutes les échelles : c'est le contenu du théorème de non dégénération (voir la section 8). L'ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$ du théorème 4.4 est alors constitué par les points de l'ensemble des centres où l'on

dispose du contrôle du k-pincement de l'entropie locale pointée : son existence est garantie par la condition (b) dans la définition de région collier, les propriétés de $\mathcal{W}$ et l'hypothèse de régularité Ahlfors faible pour μ (voir les lemmes 9.4 et 9.5 de l'article). Cette dernière permet aussi de contrôler la mesure de $\mathcal{C}$ privé de $\mathcal{C}_\varepsilon$. Le théorème de non dégénération et le choix de $\mathcal{C}_\varepsilon$ permettent aussi d'affirmer que pour tout $x \in \mathcal{C}_\varepsilon$ l'application $u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting à toutes les échelles, ce qui implique la régularité bi-Lipschitz de u sur $\mathcal{C}_\varepsilon$ (voir le lemme 9.6 et la preuve de la proposition 9.3).

5. LIMITES DE VARIÉTÉS À COURBURE DE RICCI BORNÉE

Cette section est dédiée aux résultats de J. Cheeger et A. Naber, puis de ce dernier avec W. Jiang, dans le contexte des limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée. Nous résumons les étapes principales de leurs démonstrations avec pour objectif de souligner les points communs et les différences avec les démonstrations de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, présentées dans la section précédente.

5.1. Codimension 4 de l'ensemble singulier

Un des résultats principaux de l'article de Cheeger et Naber, 2015, est la preuve de la conjecture de la codimension 4 pour les limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée, sans aucune autre hypothèse supplémentaire. Plus précisément ils ont démontré :

Théorème 5.1. — *Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés telles que $\| \operatorname{Ric}_{g_i} \| \leq (n-1)$ et $\operatorname{vol}(B_1(p_i)) > v > 0$, convergeant vers (X, d, p). Alors $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S} \leq n-4$.*

En termes de la stratification classique, cela signifie que les strates de codimension 2 et 3 sont vides. Pour démontrer le théorème 5.1, il est donc nécessaire de prouver en un premier temps que si $x \in \Sigma^{n-2} = S^{n-2} \setminus S^{n-3}$, alors x appartient à l'ensemble régulier $\mathcal{R}$, ou, de façon équivalente, il admet un cône tangent euclidien. De même, il faut démontrer que si $x \in \Sigma^{n-3}$, alors $x \in \mathcal{R}$. En réalité, une fois que l'occurrence de singularités de codimension 2 a été exclue, un argument topologique par l'absurde mène assez simplement à l'inexistence des singularités de codimension 3, comme le montre le théorème 5.12 de Cheeger et Naber, 2015. Toute la difficulté réside donc dans la démonstration du fait que Σ^{n-2} est vide, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de point admettant un cône tangent de la forme $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, avec $\alpha \in]0, 2\pi[$. Or, dans le cas à courbure de Ricci bornée, un cône tangent est une limite de variétés non effondrées avec courbure de Ricci qui tend vers 0 (section 3.2 de ce texte). Il faut donc montrer qu'il n'existe pas de telle suite convergeant vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, $\alpha \in]0, 2\pi[$. J. Cheeger et A. Naber ont ainsi prouvé le théorème suivant.

Théorème 5.2 (Théorème 5.2, Cheeger et Naber, 2015)
Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés telles que $\|\operatorname{Ric}_{g_i}\| \leq \delta_i$, avec $\delta_i \to 0$ et $\operatorname{vol}(B_1(p_i)) > v > 0$. Si (M_i, g_i, p_i) converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha \in]0, 2\pi]$, alors elle converge vers l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Ce résultat est démontré par l'absurde et repose sur un théorème de « tranches » (slicing theorem), dont l'esprit présente des similarités avec les idées décrites à la section précédente, en particulier avec le principe de propager une propriété d'une échelle aux échelles inférieures. Le point de départ consiste à supposer que (M_i, g_i, p_i) converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha < 2\pi$ et à traduire cette information géométrique en termes analytiques : en particulier, grâce à la proposition 2.5, pour $\delta > 0$ et i assez grand il existe un $(n-2, \delta)$-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^{n-2}$. On se concentre ensuite sur les ensembles de niveau de ce $(n-2, \delta)$-splitting, $u_i^{-1}(s)$ avec $s \in \mathbb{R}^{n-2}$. L'idée intuitive est de montrer qu'en zoomant sur un point $x \in u_i^{-1}(s)$, on retrouve à toutes les échelles $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$. En d'autres termes, on espère que la GH-proximité au modèle se propage aux boules $B_r(x)$ centrées en $x \in u_i^{-1}(s)$, pour tout rayon $r \in]0, 1]$. Or, les auteurs démontrent que cela est vrai pour *la plupart* des valeurs s dans l'image de u_i, quitte à transformer u_i en le composant avec une application linéaire de $\mathbb{R}^{n-2}$. Plus précisément ils prouvent :

Théorème 5.3 (Théorème 1.23, Cheeger et Naber, 2015)
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0(n, \varepsilon)$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$ et toute variété (M^n, g) telle que $\operatorname{Ric}_g \geq -(n-1)\delta$, si $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ est un $(n-2, \delta)$-splitting, alors il existe un sous-ensemble $G_\varepsilon \subset \mathbb{B}^{n-2}_1$ qui possède les propriétés suivantes :

1. *$\mathcal{H}^{n-2}(G_\varepsilon) \geq \mathcal{H}^{n-2}(\mathbb{B}^{n-2}_1) - \varepsilon$;*
2. *pour tout $s \in G_\varepsilon$, $u^{-1}(s)$ est non vide ;*
3. *pour tout $x \in u^{-1}(G_\varepsilon)$ et $r \in]0, 1]$, il existe une $(n-2) \times (n-2)$ matrice triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que la composition $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^{n-2}$ est un $(n-2, \varepsilon)$-splitting.*

Seule la borne inférieure sur la courbure de Ricci est utilisée pour ce théorème, la borne supérieure jouant un rôle uniquement dans le raisonnement par l'absurde qui démontre le théorème 5.2 et que nous esquissons ci-dessous. Le troisième point du théorème 5.3 provient d'une version différente du théorème de transformation. Pour un $(n-2, \delta)$-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ et $x \in B_1(p)$, les auteurs définissent une échelle singulière r_x, puis démontrent que pour tout $x \in B_1(p)$ et tout rayon compris entre r_x et 1 il existe une matrice de transformation qui donne un $(n-2, \varepsilon)$-splitting sur $B_r(x)$ quand nous la composons avec u. Cela passe aussi par une démonstration par l'absurde, voir la section 3 de l'article de Cheeger et Naber, 2015. Le but étant d'obtenir un splitting à toutes les échelles, et non seulement pour celles supérieures à r_x, il s'agit ensuite de montrer qu'il n'y a pas trop de points tels que l'échelle singulière est

strictement positive. En définissant

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in B_1(p) : r_x > 0} B_{r_x}(x),$$

il est en effet possible de contrôler la mesure $\mathcal{H}^{n-2}$ de l'image $u(\mathcal{B}) \subset \mathbb{B}_1^{n-2}$, ce qui permet de définir l'ensemble G_ε du théorème 5.3.

La démonstration du théorème 5.2 est obtenue en combinant le théorème 5.3 et le résultat de ε-régularité de M. Anderson donné dans le théorème 2.15 de ce texte. Ce dernier implique, dans le contexte du théorème 5.2, que la convergence de (M_i, g_i, p_i) vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ est au sens $C^{1,\eta} \cap W^{2,q}$, pour tout $\eta < 1$ et $q < \infty$, en dehors de $\mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$.

Esquisse de la démonstration du théorème 5.2. — Considérons une suite qui satisfait les hypothèses du théorème 5.2 et qui converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha < 2\pi$. Pour un $(n-2, \delta)$-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^{n-2}$ on peut fixer $s_i \in G_{\varepsilon,i}$, puis choisir un point $x_i \in u_i^{-1}(s_i)$ et un rayon r_i de façon à ce que r_i soit le minimum du rayon harmonique sur $u_i^{-1}(s_i)$. Le théorème de ε-régularité 2.15 et le fait que α est strictement inférieur à 2π garantissent que le minimum est atteint et que r_i tend vers 0. La suite des variétés ré-échelonnées $(M_i^n, r_i^{-2} g_i, x_i)$ converge vers une limite $(\mathbb{R}^{n-2} \times S, d, x)$. Le choix de r_i et x_i, la double borne sur la courbure de Ricci et le théorème 2.15 impliquent que S et $X = \mathbb{R}^{n-2} \times S$ sont des variétés lisses et plates. De plus, le non effondrement permet d'obtenir que la croissance du volume sur X est euclidienne. Une surface plate à croissance de volume euclidienne coïncide avec $\mathbb{R}^2$, donc $S = \mathbb{R}^2$ et $X = \mathbb{R}^n$. Mais le théorème 2.15 garantit aussi la continuité du rayon harmonique (voir la discussion qui précède la preuve du théorème 1.1 dans l'article de Anderson, 1990), donc en $x \in X$ on a $r_h(x) = 1$. Cela est incompatible avec le fait que X soit l'espace euclidien, pour lequel le rayon harmonique est infini en tout point. □

5.2. Bornes L^2 a priori sur la courbure de Riemann

Jiang et Naber, 2021, ont démontré que dans le cas d'une double borne sur la courbure de Ricci, non seulement l'ensemble singulier a codimension au moins 4, mais il a aussi mesure de Hausdorff $(n-4)$-dimensionnelle localement finie et il est $(n-4)$-rectifiable. Ce résultat précède l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, et peut être redémontré à partir du théorème 3.8, vrai lorsque Ricci est minoré, et d'un théorème de ε-régularité, spécifique au cas de courbure de Ricci bornée (voir le théorème 6.1 de Cheeger et Naber, 2015, et le théorème 4.34 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Ils ont également prouvé une borne a priori sur la norme L^2 de la courbure de Riemann : la démonstration utilise quant à elle des techniques nécessitant que la courbure de Ricci soit bornée. Ce résultat avait été démontré auparavant, uniquement en dimension 4, dans le théorème 1.13 de Cheeger et Naber, 2015, et conjecturé vrai en toute dimension dans la conjecture 6.3 de Naber, 2014, et dans la conjecture 9.1 de Cheeger et Naber, 2015.

Théorème 5.4 (Borne L^2, Théorème 1.6 de Jiang et Naber, 2021)
Soit (M^n, g) une variété telle que $\| \mathrm{Ric}_g \| \leq (n-1)$ et $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0$. Alors il existe une constante $C(n, v) > 0$ telle que :

$$\fint_{B_1(p)} \|\mathrm{Rm}_g\|^2 dv_g \leq C(n, v). \tag{5}$$

La preuve du théorème précédent est fortement liée à l'étude des régions collier. Les auteurs définissent les régions collier $\mathcal{N} \subset B_2(p)$ d'une façon similaire à celle que nous avons décrite dans la section précédente, avec l'information supplémentaire que les singularités à la limite ont codimension supérieure ou égale à 4. Par conséquent, dans le cas à Ricci borné, si $x \in \mathcal{C}$ est l'un de centres d'une région collier, il existe r_x tel que pour tout $r \in [r_x, 1]$ il existe une (δr)-presque isométrie

$$\varphi_{x,r} : B^{\mathbb{R}^{n-4} \times C(S^3/\Gamma)}_{\delta^{-1} r}(0^{n-4}, o) \to B_{\delta^{-1} r}(x),$$

où Γ est un sous-groupe non trivial de $O(4)$. Comme dans le cas de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, les démonstrations reposent sur un théorème de décomposition en régions collier et un théorème de structure des régions collier. Ce dernier présente une différence essentielle avec le théorème 4.2 : en plus de démontrer que la mesure μ associée à la région collier est $(n-4)$-Ahlfors régulière, il donne un contrôle sur la norme L^2 de la courbure de Riemann dans $\mathcal{N} \cap B_1(p)$. Combinée avec le théorème de décomposition, la borne L^2 de la courbure de Riemann dans la région collier permet d'obtenir le théorème 5.4 (nous renvoyons aux sections 1.3.5 et 8 de l'article de Jiang et Naber, 2021).

Il faut donc montrer que pour tout δ' il existe un δ tel que si $\mathcal{N}$ est une $(n-4, \delta)$-région collier dans une variété non effondrée avec $\| \mathrm{Ric}_g \| \leq \delta$, alors

$$\fint_{\mathcal{N} \cap B_1(p)} \|\mathrm{Rm}_g\|^2 dv_g \leq \delta'. \tag{6}$$

Pour illustrer le bien-fondé de cette inégalité, rappelons que la région collier est la boule $B_2(p)$ privée des boules $B_{r_x}(x)$ avec $x \in \mathcal{C}$ (l'ensemble $\mathcal{C}_0$ est vide dans le cas des variétés lisses). Donc $\mathcal{N}$ est constituée des points « loin » de la strate quantitative de codimension 4, ou en d'autres termes loin des points presque singuliers où la courbure s'accumule et explose. Il est donc raisonnable qu'en dehors des boules $B_{r_x}(x)$ avec $x \in \mathcal{C}$, la courbure de Riemann reste contrôlée.

La démonstration de (6) dépend de l'Ahlfors régularité de la mesure μ et se sert du pincement d'une quantité monotone qui dans ce cas est le « $\mathcal{H}$-volume ».

$$\mathcal{H}_t(x) = \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_g^2(x,y)}{4t}} dv_g(y),$$

Il remplace le rapport de volumes et, comme lui, est décroissant. De plus, un contrôle du pincement de $\mathcal{H}_t(x)$ est équivalent à la $(n-4, \delta)$-symétrie des boules centrées en x (voir la section 4.2 de l'article de Jiang et Naber, 2021). Les auteurs démontrent que si $x \in \mathcal{N}$, la norme L^2 de la courbure de Riemann sur une boule $B_r(x)$, où $r = d(x, \mathcal{C})/2$, est

contrôlée par le pincement du $\mathcal{H}$-volume. Cette estimée, avec les propriétés géométriques et la monotonie du $\mathcal{H}$-volume, permettent d'obtenir (6) (voir la proposition 4.3 et le théorème 4.1 du même article).

Observons que la démonstration de Jiang et Naber, 2021, de la $(n-4)$-Ahlfors régularité de la mesure μ associée à une région collier $\mathcal{N}$ présente certains points en commun et plusieurs différences avec ce qui a été présenté dans la section précédente. Nous pouvons identifier trois étapes principales dans la preuve :

1. Construction d'une application bi-Hölder ϕ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$, qui suffit pour prouver la borne inférieure dans la $(n-4)$-Ahlfors régularité. La construction de ϕ, donnée dans la section 3.3 de l'article, se sert de la définition des régions collier via des GH-presque isométries pour montrer que l'ensemble des centres est un « ensemble de Reifenberg », d'où il existe une application de Reifenberg bi-Hölder de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$.
2. Construction d'une application bi-Lipschitz u sur un sous-ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon \subset \mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$ (le théorème 5.2 de l'article, prouvé dans la même section). Cela nécessite de supposer une régularité Ahflors faible. La construction de $\mathcal{C}_\varepsilon$ repose sur le contrôle approprié, dans une région collier, du hessien d'un $(n-4,\varepsilon)$-splitting u. Pour l'obtenir, les auteurs se servent d'un contrôle de la fonction de Green $G_\mu = b^{-2}$ associée à la mesure μ et d'une estimée de super-convexité pour une énergie qui combine le hessien de u et le gradient de b. Cette énergie s'apparente à l'énergie A qui a été introduite et dont la décroissance a été montrée dans l'article de Colding, 2012.
3. Avec un raisonnement par récurrence, à partir de l'Ahlfors régularité faible et des deux points précédents, il est alors possible de démontrer l'Ahlfors régularité souhaitée sur une région collier d'une variété lisse (section 6.2 de l'article). Un argument d'approximation, prouvé dans le théorème 3.19 de l'article, permet ensuite d'obtenir le résultat analogue dans le cas des espaces limites (comme dans les sections 9.4 et 9.5 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

6. LE THÉORÈME DE TRANSFORMATION

Nous présentons dans cette section le théorème de transformation et sa démonstration, à titre d'exemple représentatif des techniques utilisées dans les trois articles de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber que nous venons de résumer. Dans le théorème de transformation en effet, comme dans beaucoup de résultats dans ces travaux, on se sert d'un argument par l'absurde et on étudie finement les propriétés d'un (k,δ)-splitting. Le théorème de transformation est un des exemples le plus simples de cette étude, qui consiste à traduire des propriétés géométriques des boules en termes analytiques, pour ensuite obtenir de nouvelles informations sur la géométrie. En outre, dans le cas $k = n$, le théorème de transformation permet de revenir sur la théorie de Cheeger–Colding en fournissant une nouvelle preuve du fait que la partie régulière $\mathcal{R}$ d'un espace limite est bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse.

Nous commençons par énoncer une version légèrement différente du théorème de transformation, qui, comme montré ci-dessous, implique celle donnée dans le théorème 4.3.

THÉORÈME 6.1 (Théorème 7.7, CHEEGER, JIANG et NABER, 2021)
Soient $\varepsilon, \eta, v > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ où ε_0 est donné par la proposition 6.3. Il existe $\delta_1(\varepsilon, \eta, v, n)$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_1$, si (M^n, g) est une variété qui vérifie

$$\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta^2 \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0,$$

et les deux propriétés suivantes :

(i) *il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $s \in [r_0, 1]$ la boule $B_s(p)$ est (k, δ^2)-symétrique et n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique ;*
(ii) *il existe un (k, δ)-splitting $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$;*

alors pour tout $s \in [r_0, 1]$ il existe une matrice triangulaire inférieure $T_{p,r}$ telle que $T_{p,r} \circ u : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting.

En outre, nous avons un contrôle Hölder de la norme de $T_{p,r}$: $\|T_{p,r}\| \leq r^{-\varepsilon}$.

Preuve du théorème 4.3 en connaissant le théorème 6.1. — Considérons (M^n, g) une variété telle que $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta^2$, $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0$, contenant une (k, δ, η)-région collier $\mathcal{N} \subset B_2(p)$, avec δ à choisir. Si $\delta < 1/8$, d'après la définition de région collier, condition (c), la boule $B_8(p)$ est (k, δ^2)-symétrique. Pour $\delta' > 0$, à choisir également dans la suite, on considère la quantité $\delta(\delta', n)$ donnée par la proposition 2.5 : pour $\delta^2 \leq \delta(\delta', n)$, la proposition 2.5 assure qu'il existe un (k, δ')-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$. Or, en se servant de l'inégalité de Bishop–Gromov, on peut montrer qu'il existe une constante $C_n \geq 1$ telle que pour tout $x \in \mathcal{C}$ la restriction de u à $B_2(x)$ est un $(k, C_n\delta')$ splitting. On peut alors choisir $\delta' = \delta'(n, v, \eta, \varepsilon)$ tel que $C_n\delta' \leq \delta_1$, où $\delta_1(\varepsilon, \eta, n, v)$ est donné par le théorème 6.1. On pose alors

$$\delta_0(n, v, \varepsilon, \eta) = \min\{1/8, \sqrt{\delta(\delta', n)}, C_n\delta'\}.$$

De cette façon, pour tout $\delta \leq \delta_0 \leq \delta_1$, si (M^n, g) est une variété non effondrée avec $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta^2$, $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v$ et $\mathcal{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, η)-région collier, pour tout point x de l'ensemble de centres $\mathcal{C}$ on a :

(i) Pour tout $s \in [r_x, 1]$ la boule $B_s(x)$ est (k, δ^2)-symétrique mais pas $(k+1, \eta)$-symétrique.
(ii) $u : B_2(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, δ)-splitting.

On peut donc appliquer le théorème 6.1 et obtenir que pour tout centre de la région collier $x \in \mathcal{C}$ et pour tout r dans $[r_x, 1]$ il existe une matrice triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting et de plus $\|T_{x,r}\| \leq r^{-\varepsilon}$.

Pour ce qui concerne la régularité Hölder de $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^k$, on fixe $x, y \in \mathcal{C}$ tels que $d(x, y) = r$. On sait qu'il existe $T = T_{x,r}$ telle que $T \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting. Puisque $B_r(x)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique, il est possible de montrer que la restriction de $T \circ u$ à l'ensemble des centres $\mathcal{C} \cap B_r(x)$ est de plus une (εr)-presque isométrie. Cela implique en particulier que :

$$\big|\, \|T \circ u(x) - T \circ u(y)\| - d(x, y) \,\big| \leq \varepsilon r,$$

On a choisi y tel que $d(x,y) = r$, donc en se servant de $\|T\| \leq r^{-\varepsilon}$, on obtient

$$\|u(x) - u(y)\| \geq (1-\varepsilon) r^{1+\varepsilon}.$$

De plus, u est un (k,δ)-splitting, donc c'est une application $(1+\delta)$-Lipschitz, où δ est choisi en fonction de ε. On a donc la majoration :

$$\|u(x) - u(y)\| \leq (1+\varepsilon) d(x,y),$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous nous concentrons désormais sur la démonstration du théorème 6.1. L'argument donné par Cheeger, Jiang et Naber, 2021, repose sur une traduction précise de certaines propriétés géométriques en termes analytiques. Dans ce cas, il s'agit d'étudier des cônes limites $C(Y)$ ayant la propriété d'être k-symétriques mais pas $(k+1,\eta)$-symétriques (cela provient de l'hypothèse (i)). Cette rigidité géométrique peut être transposée en termes de spectre du laplacien sur Y et de comportement des fonctions harmoniques sur $C(Y)$.

6.1. Valeurs propres et fonctions harmoniques sur les cônes limites

Les travaux de Cheeger, 1979, et Cheeger, 1983, ont montré qu'il est possible de donner un sens à l'opérateur laplacien sur des variétés avec des singularités coniques ou plus généralement des « pseudovariétés ». Nous considérons le cas particulier d'un cône $(C(Y), d, o)$ obtenu comme limite de variétés (M_i, g_i, p_i) avec

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

pour $\delta_i \to 0$. Grâce aux travaux de Ding, 2002, et Cheeger et Colding, 2000, il a été démontré que, à la fois sur le cône limite $C(Y)$ et sur sa section Y, il existe des opérateurs laplaciens $\Delta_{C(Y)}$ et Δ_Y bien définis. De plus, Δ_Y possède un spectre discret $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ avec $\lambda_k \to +\infty$. La première valeur propre non nulle vérifie $\lambda_1 \geq n-1$. Enfin, les fonctions propres ϕ_i associées à λ_i sont Lipschitz et les fonctions définies par

$$u(r,y) = r^{\alpha_i}\phi_i(y), \text{ où } \alpha_i > 0 \text{ est tel que } \lambda_i = \alpha_i(n-2+\alpha_i),$$

sont harmoniques sur $C(Y)$.

Il est possible de reformuler ces résultats dans le contexte plus général introduit par Lott–Sturm–Villani et Ambrosio–Gigli–Savaré des espaces métriques mesurés $\mathrm{RCD}(K,N)$: cela signifie que dans un sens « synthétique » la courbure de Ricci est minorée par K et la dimension majorée par N. Par stabilité de la condition RCD sous la convergence de Gromov–Hausdorff mesurée, les cônes limites $C(Y)$ auxquels nous nous intéressons sont des espaces $\mathrm{RCD}(0,n)$, et d'après un résultat de Ketterer, 2015a, leurs sections sont $\mathrm{RCD}(n-1,n)$, d'où l'on peut retrouver la borne inférieure sur λ_1.

Nous allons supposer que $C(Y)$ est k-symétrique. Par conséquent, pour i assez grand il existe un (k,ε_i)-splitting harmonique $u_i : B_1(p_i) \to \mathbb{R}^k$ avec $\varepsilon_i \to 0$. La suite $(u_i)_i$ converge alors vers une application splitting $u : C(Y) \to \mathbb{R}^k$ dont les composantes

$(u^1, \dots, u^k)$ sont harmoniques, linéaires et orthogonales. Puisque une fonction harmonique est de la forme $u^j = r^{\alpha_j}\phi_j$, il en résulte que $\alpha_j = 1$ et $\lambda_j = (n-1)$. Les k premières valeurs propres de Δ_Y coïncident donc avec $(n-1)$. On peut également prouver la réciproque : si les premières k valeurs propres de Y sont égales à $(n-1)$, alors, grâce au théorème 1.4 de Ketterer, 2015b, la section Y est une suspension sphérique et le cône $C(Y)$ scinde un espace euclidien de dimension k. Il est donc raisonnable de penser que si $C(Y)$ est k-symétrique mais pas $(k+1,\eta)$-symétrique, la valeur propre λ_{k+1} doit différer de $(n-1)$ par une constante positive. C'est le contenu de la proposition suivante.

Proposition 6.2 (Proposition 7.3, Cheeger, Jiang et Naber, 2021)
Fixons $\eta > 0$ et considérons une suite de variétés (M_i^n, g_i, p_i) telles que

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v,$$

avec $\delta_i \to 0$. Supposons que (M_i, g_i, p_i) converge vers un cône k-symétrique

$$(C(Y), d, o) = (\mathbb{R}^k \times C(Z), d, o),$$

et que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1,\eta)$-symétrique. Alors les premières k-valeurs propres λ_j du Laplacien sur la section du cône Y sont égales à $(n-1)$ et il existe $\tau = \tau(n, v, \eta) > 0$ tel que :

$$\lambda_{k+1} > (n-1) + \tau.$$

Les auteurs montrent, par l'absurde, que si λ_{k+1} pouvait être arbitrairement proche de $(n-1)$, alors il serait possible d'obtenir pour un ε assez petit un $(k+1, C\varepsilon)$-splitting sur $C(Y)$, donné par $(x_1, \dots, x_k, r^{\alpha_{k+1}}\varphi_{k+1}(y))$. Pour i assez grand, on trouverait alors un $(k+1, C\varepsilon)$-splitting sur la boule $B_1(p_i) \subset M_i$, ce qui contredit le fait que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1,\eta)$-symétrique.

Une conséquence de cette proposition qui joue un rôle important dans la preuve du théorème 6.1 est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 6.3 (Lemme 7.8, Cheeger, Jiang et Naber, 2021)
Fixons $\eta > 0$. Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, v, \eta)$ tel que pour toute fonction harmonique u sur $C(Y)$, s'il existe une constante $C > 0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tels que pour tout $(r, y) \in C(Y)$ nous avons

$$|u(r, y)| \leq Cr^{1+\varepsilon} + C, \tag{7}$$

alors u dépend linéairement de $r(\cdot) = d(\cdot, o)$.

La preuve repose sur le fait qu'une fonction harmonique peut s'écrire

$$u(r, y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{\alpha_i}\phi_i(y), \tag{8}$$

où la convergence est au sens $W^{1,2}(C(Y))$. En choisissant ε_0 en fonction de τ donné dans la proposition précédente, il est possible de montrer que si u satisfait la condition (7), alors pour tout $i \geq k+1$ nous avons $b_i = 0$. Il ne reste alors que les termes avec $\alpha_i = 1$, et u dépend linéairement de la distance au sommet.

6.2. Esquisse de la preuve par l'absurde du théorème 6.1

Observons tout d'abord que nier la conclusion du théorème 6.1 permet d'obtenir une suite de variétés qui converge vers un cône limite qui est k-symétrique mais pas $(k+1,\eta)$-symétrique. En effet, si le résultat était faux, il existerait un $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ tel que pour tout δ la conclusion du théorème est fausse. Il est alors possible de choisir une suite $\delta_i \to 0$ telle que pour tout i il existe une variété (M_i^n, g_i, p_i) satisfaisant

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq \delta_i \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v,$$

et telle que, pour une certaine échelle, il n'existe pas de matrice de transformation, même si les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées. Il existe donc un rayon r_i vérifiant l'hypothèse (i), donc tel que pour tout $s \in [r_i, 1]$ les boules $B_s(p_i)$ sont (k, δ_i^2)-symétriques mais pas $(k+1,\eta)$-symétriques. Si r_i tend vers 0, ce qui comme nous allons le voir est le cas, nous pouvons considérer la suite de variétés ré-échelonnées $(M_i, r_i^{-2} g_i, p_i)$, qui converge vers un cône limite $(C(Y), d, p)$ k-symétrique $C(Y) = \mathbb{R}^k \times C(Z)$, mais pas $(k+1,\eta)$-symétrique.

En se servant de l'hypothèse (ii), il existe un (k,δ_i)-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^k$. En revanche u_i ne peut pas être transformé en un (k,ε)-splitting pour toutes les échelles s dans $[r_i, 1[$ à l'aide de la composition avec une application linéaire. Cela signifie qu'à partir d'une certaine échelle, une transformation $T_{p,s}$ n'existe pas : nous pouvons donc considérer le plus petit rayon $s_i \in]r_i, 1]$ pour lequel il existe une transformation T_{p_i,s_i} telle que la composition $T_{p,s_i} \circ u_i$ est un (k,ε)-splitting. En particulier, par définition de s_i, pour l'échelle $s = s_i/10$, il n'existe pas de transformation $T_{p_i,s}$ qui fasse de u_i un (k,ε)-splitting.

Or, le fait que δ_i tend vers 0 implique que les rayons r_i, s_i convergent aussi vers 0. Si ce n'était pas le cas, grâce à l'inégalité de Bishop–Gromov il existerait une constante $C > 0$ telle que u_i restreint à $B_s(p_i)$, $s = s_i/10$, est un $(k, C\delta_i)$-splitting. Pour i assez grand cela impliquerait que u_i est un (k,ε)-splitting sur $B_s(p_i)$, ce qui contredirait donc la définition de s_i.

Il convient alors de considérer les variétés ré-échelonnées $(M_i^n, \tilde{g}_i, p_i)$ avec la métrique $\tilde{g}_i = s_i^{-2} g_i$, qui convergent comme observé ci-dessus vers $C(Y) = \mathbb{R}^{k+1} \times C(Z)$, $C(Y)$ non $(k+1,\eta)$-symétrique. Le but est de faire converger aussi la suite des splittings vers une fonction harmonique sur $C(Y)$ pour pouvoir exploiter le corollaire 6.3.

Pour ce faire on définit sur les variétés $(M_i^n, \tilde{g}_i, p_i)$ les fonctions

$$v_i = s_i^{-1}(T_{p_i,s_i} \circ u_i),$$

où sans perte de généralité nous avons supposé $u_i(p_i) = 0^k$. Avec ce choix, la constante de Lipschitz de v_i pour la métrique $\tilde{g}_i$ coïncide avec celle de $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ pour la métrique g_i. Or, les applications $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ sont toutes des (k,ε)-splitting, donc les constantes de Lipschitz de $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ et v_i sont uniformément bornées par $(1+\varepsilon)$. Grâce à un résultat de convergence pour les fonctions lipschitziennes définies sur des suites convergentes en topologie de Gromov–Hausdorff, la suite $(v_i)_i$ converge vers une fonction harmonique définie sur le cône limite $v : C(Y) \to \mathbb{R}^k$ (voir la proposition 4.28 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

On utilise alors une estimée pour la norme des matrices de transformation. Les auteurs montrent que pour tout $R \geq r \geq s_i$,

$$\|T_{x_i,r} \circ T_{x_i,R}^{-1}\| \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{C\sqrt{\varepsilon}}.$$

Cela permet de montrer que si $\tilde{d}_i$ est la distance associée à $\tilde{g}_i$ et $x \in M_i^n$ est tel que $\tilde{d}_i(x, p_i) = R \in]1, s_i^{-1}]$, on obtient :

$$\|\nabla v_i(x, R)\|_{\tilde{g}_i} \leq C(1+\varepsilon)R^{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ce contrôle passe à la fonction limite v. Il en résulte que pour tout $(R, x) \in C(Y)$ tel que $d(x, o) = R$, on a

$$|v(x, R)| \leq CR^{1+\sqrt{\varepsilon}} + C.$$

En sachant que ε est inférieur à ε_0 donné par le corollaire 6.3, on obtient que v est linéaire par rapport à la distance du sommet du cône. Il est possible alors de montrer que pour $v = (v^1, \ldots, v^k)$, les gradients sont linéairement indépendants, et que, sans perte de généralité, v^j coïncide avec la j-ème coordonnée $x^j : \mathbb{R}^k \times C(Z) \to \mathbb{R}$. Cela implique que v est un splitting à toutes les échelles. Pour i assez grand, v_i est alors un (k, ε)-splitting sur la boule $\tilde{B}_{10^{-1}}(p_i)$. En revenant à (M_i^n, g_i, p_i), pour i assez grand, l'application u_i est un (k, ε)-splitting à l'échelle $s_i/10$, ce qui contredit l'hypothèse que u_i ne pouvait pas être transformée en un (k, ε)-splitting à une échelle inférieure à s_i.

6.3. Esquisse d'une preuve due à G. Carron

En exploitant les résultats spectraux sur les cônes limites, il est possible de donner une preuve alternative du théorème de transformation 6.1. Nous expliquons à présent les ingrédients principaux d'une démonstration due à G. Carron.

On considère comme dans la section 6.1 un cône $C(Y)$, limite d'une suite de variétés (M_i, g_i, p_i), non effondrées et dont la courbure de Ricci est minorée. On observe que d'après le résultat de convergence du volume, le théorème 0.1 de l'article de Colding, 1997, les mesures dv_{g_i} associées aux métriques riemanniennes g_i convergent vers une mesure μ sur le cône $C(Y)$. Or, à partir du trou spectral donné par la proposition 6.2 et de la décomposition des fonctions harmoniques (8), on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 6.4. — *Fixons $\eta > 0$ et considérons (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v,$$

avec $\delta_i \to 0$. Supposons que (M_i, g_i, p_i) converge vers un cône k-symétrique $(C(Y), d, o) = (\mathbb{R}^k \times C(Z), d, o)$ et que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique. Soit $h : C(Y) \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que

$$\varepsilon = \fint_{B_1(o)} |\|\nabla h\|^2 - 1| d\mu \leq 1.$$

Alors il existe $\alpha = \alpha(n, v, \eta) > 0$ *et des constantes* c, Γ *telles que pour tout* $\theta \in]0, 1[$

$$\fint_{B_\theta(o)} |\|\nabla h\|^2 - c| d\mu \leq \Gamma \theta^\alpha \varepsilon, \quad |c - 1| \leq \Gamma \varepsilon.$$

Cela signifie que si h est une fonction harmonique dont le gradient est proche en moyenne de 1 sur la boule unité, alors h reste proche en moyenne d'une fonction linéaire pour toutes les échelles inférieures. Cela est le cas en particulier pour les composantes $(u^1, \dots, u^k)$ d'un (k, δ)-splitting.

L'exposant α dans la proposition précédente dépend du trou spectral τ entre les valeurs propres λ_k et λ_{k+1}.

Proposition 6.5. — *Pour tout* $\varepsilon, \eta, v > 0$ *il existe* $\delta_0(n, v, \eta, \varepsilon)$ *tel que pour tout* $\delta \leq \delta_0$, *si* (M^n, g) *est une variété telle que*

$$\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\delta \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p)) > v,$$

et qui vérifie les hypothèses (i) *et* (ii) *du théorème 6.1, alors il existe* $\lambda \in]r_0, 1[$ *tel que pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *satisfaisant* $\lambda^\ell \in]r_0, 1[$ *il existe une* $(k \times k)$ *matrice triangulaire inférieure* T_ℓ *telle que :*

1. *La composition* $T_\ell \circ u : B_{\lambda^\ell}(p) \to \mathbb{R}^k$ *est un* (k, ε)*-splitting.*
2. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\|T_{\ell+1} \circ T_\ell^{-1} - \mathbb{I}_k\| \leq C\varepsilon$.

Cela permet en réalité d'obtenir l'existence d'une matrice $T_{p,r}$ pour toutes les échelles $r \in [r_0, 1]$, et donc d'obtenir le même énoncé que celui du théorème 6.1 : grâce à l'inégalité de Bishop–Gromov, pour une échelle r comprise entre $\lambda^{\ell+1}$ et λ^ℓ l'application $T_\ell \circ u$ est une $(k, C(\lambda)\delta)$-splitting. On peut alors choisir δ de façon à ce que $T_\ell \circ u$ soit un (k, ε)-splitting pour tout $r \in]\lambda^{\ell+1}, \lambda^\ell[$. En d'autres termes, la matrice $T_{p,r}$ reste constante égale à T_ℓ pour tout $r \in]\lambda^{\ell+1}, \lambda^\ell[$.

Nous donnons les étapes essentielles de la preuve de la proposition 6.5, en évitant la plupart des détails techniques.

Esquisse de la démonstration. — La notation $\psi(\delta)$ indique dans la suite une quantité qui dépend de η, v, n, δ et qui tend vers 0 quand δ tend vers 0.

Étape 1. Puisque les boules $B_1(p)$ sont (k, δ^2)-symétriques mais pas $(k+1, \eta)$-symétriques, elles convergent, pour δ qui tend vers 0, vers la boule unité dans un cône $C(Y) = \mathbb{R}^k \times C(Z)$. Or, les (k, δ)-splittings harmoniques $u : B_1(p) \to \mathbb{R}^k$ possèdent une borne uniforme sur leur constante de Lipschitz, donc d'après la proposition 4.28 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, ils forment une famille pré-compacte par rapport à la convergence $W^{1,2}$ des fonctions sur des espaces convergeant en topologie de Gromov–Hausdorff. Alors pour δ assez petit, il existe un (k, δ)-splitting u_δ, que dans la suite nous notons u, et une fonction harmonique $h : B_1^{C(Y)}(o) \to \mathbb{R}^k$ telle que

$$\left| \fint_{B_1(p)} \langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle dv_g - \fint_{B_1^{C(Y)}(o)} \langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle d\mu \right| \leq \psi(\delta).$$

Étape 2. La matrice de composantes $H_{ij} = \langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle$ est proche en moyenne de l'identité $\mathbb{I}_k$, c'est-à-dire :

$$⨍_{B_1^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - \delta_{ij}| d\mu \leq \delta + \psi(\delta) = \psi_1(\delta). \tag{9}$$

Pour le démontrer, nous définissons $\zeta_{ij}(y, s) = s - \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, k$. Puisque $\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle$ converge vers H_{ij} au sens L^1 pour δ qui tend vers 0, et grâce à la convergence des mesures, nous pouvons nous servir d'une remarque dans l'article de Gigli, Mondino et Savaré, 2015 (voir l'égalité (6.6) et ce qui suit, avec $p = 1$) qui, en appliquant ζ_{ij} à $\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle$, permet d'obtenir

$$\left| ⨍_{B_1^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - \delta_{ij}| d\mu - ⨍_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta_{ij}| dv_g \right| \leq \psi(\delta).$$

Cette dernière inégalité implique (9), combinée au fait que, par définition de (k, δ)-splitting nous avons

$$⨍_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta_{ij}| dv_g \leq \delta. \tag{10}$$

Étape 3. Grâce à (9), nous pouvons appliquer à h la proposition 6.4. Il existe donc une matrice A telle que

$$\|A - \mathbb{I}_k\| \leq \Gamma \psi_1(\delta) \tag{11}$$

et pour tout $\theta \in]0, 1[$, $i, j = 1, \ldots, k$

$$⨍_{B_\theta^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - A_{ij}| d\mu \leq \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta).$$

En se servant de (9), (10) et de l'inégalité de Bishop–Gromov, nous obtenons pour tout $\theta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} ⨍_{B_\theta(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - A_{ij}| dv_g &\leq \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta) + \theta^{-n} \psi_1(\delta) + \frac{v_{-\delta}(1)}{v_{-\delta}(\theta)} \delta \\ &= \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta) + \psi_2(\theta, \delta). \end{aligned}$$

Étape 4. L'inégalité (11) implique qu'en choisissant δ tel que $\psi_1(\delta)$ est assez petit, il existe une matrice triangulaire inférieure T qui satisfait

$${}^t T A T = \mathbb{I}_k \text{ et } \|T - \mathbb{I}_k\| \leq \Gamma \psi_1(\delta).$$

Nous définissons alors pour $\theta \in]0, 1[$:

$$v = T \circ u : B_\theta(p) \to \mathbb{R}^k.$$

Avec ce choix de T, l'application v est telle que :

$$\sup_{B_\theta(p)} |\nabla v| \leq (1 + \delta)(1 + \Gamma \psi_1(\delta)) = f(\delta),$$

$$⨍_{B_\theta(p)} |\langle \nabla v^i, \nabla v^j \rangle - \delta_{ij}| \leq (1 + \Gamma \psi_1(\delta))(\Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta) + \psi_2(\theta, \delta)) = g(\delta, \theta).$$

Étape 5. Observons tout d'abord que, en vertu de l'inégalité de Bishop–Gromov, il existe une constante positive $C_0(n)$ telle que pour tout $r \in [r_0, 1]$, u restreint à $B_r(p)$ est un $(k, Cr^{-n}\delta)$-splitting. En outre, la preuve du lemme 3.34 de l'article de Cheeger et Naber, 2015, fournit un argument pour prouver le fait suivant :

Lemme 6.6. — *Il existe une constante $C(n) > 1$ telle que si $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\eta$ et $u : B_1(p) \to \mathbb{R}^k$ est une fonction harmonique satisfaisant*

$$\sup_{B_1(p)} |\nabla u| \leq C(n) \quad \text{et} \quad \fint_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta_{ij}| \leq \eta,$$

alors u restreinte à la boule $B_{1/2}(p)$ est un $(k, C(n)\sqrt{\eta})$-splitting.

Nous allons choisir θ et δ de façon à ce que l'application v satisfasse les hypothèses du lemme précédent. Nous fixons d'abord δ_0 tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$ nous avons $f(\delta) \leq C(n)$ et de plus

$$(1 + \Gamma\psi_1(\delta))\Gamma\psi_1(\delta) < 1.$$

Ensuite nous choisissons $\theta \in]0, 1[$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$:

$$(1 + \Gamma\psi_1(\delta))\Gamma\psi_1(\delta)\theta^\alpha \leq \theta^\alpha := \frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2}.$$

Enfin, avec θ fixé ci-dessus, nous choisissons $\delta \in]0, \delta_0[$ tel que

$$(1 + \Gamma\psi_1(\delta))\psi_2(\theta, \delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2},$$

et de plus tel que

$$\frac{\delta C_0(n)}{\varepsilon} < \theta = \left(\frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Avec ces choix de θ et δ, nous avons deux possibilités. Si $r_0 > \theta$, alors pour tout $r \in [r_0, 1]$

$$r^n \geq r_0^n > \theta > \frac{C_0(n)\delta}{\varepsilon}.$$

Cela implique que u restreint aux boules $B_r(x)$ est un (k, ε)-splitting sans besoin de composer avec une matrice de transformation. Sinon, si $\theta \geq r_0$, les choix de δ et θ garantissent que $f(\delta) \leq C(n)$ et $g(\theta, \delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{C(n)^2}$. En appliquant alors le lemme ci-dessus, nous en déduisons que l'application $v = T \circ u$ restreinte à la boule de rayon $\theta/2$ est un (k, ε)-splitting. Il existe donc $\lambda = \theta/2$ et une matrice triangulaire inférieure $T_1 = T$ telle que

$$T_1 \circ u : B_\lambda(p) \to \mathbb{R}^k$$

est un (k, ε)-splitting. De plus, T_1 est proche de l'identité : $\|T_1 - \mathbb{I}_k\| \leq C\varepsilon$. En répétant le même argument sur $B_\lambda(p)$ et l'application $T_1 \circ u$, puis sur $B_{\lambda^2}(p)$ et $T_2 \circ u$, et ainsi de suite tant que λ^ℓ est supérieur à r_0, nous obtenons le résultat souhaité. □

RÉFÉRENCES

Michael T. Anderson (1989). « Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **2** (3), p. 455-490.

——— (1990). « Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds », *Invent. Math.* **102** (2), p. 429-445.

——— (1995). « Einstein metrics and metrics with bounds on Ricci curvature ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*. Birkhäuser, Basel, p. 443-452.

Gioacchino Antonelli, Elia Brué et Daniele Semola (2019). « Volume bounds for the quantitative singular strata of non collapsed RCD metric measure spaces », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **7** (1), p. 158-178.

Richard Bamler (2017). « Structure theory of singular spaces », *J. Funct. Anal.* **272** (6), p. 2504-2627.

——— (2018). « Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature », *Ann. of Math. (2)* **188** (3), p. 753-831.

Shigetoshi Bando, Atsushi Kasue et Hiraku Nakajima (1989). « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. Math.* **97** (2), p. 313-349.

Olivier Biquard (2013). « Désingularisation de métriques d'Einstein. I », *Invent. Math.* **192** (1), p. 197-252.

Olivier Biquard et Vincent Minerbe (2011). « A Kummer construction for gravitational instantons », *Comm. Math. Phys.* **308** (3), p. 773-794.

Christine Breiner et Tobias Lamm (2015). « Quantitative stratification and higher regularity for biharmonic maps », *Manuscripta Math.* **148** (3-4), p. 379-398.

Elia Brué, Enrico Pasqualetto et Daniele Semola (2019). « Rectifiability of the reduced boundary for sets of finite perimeter over $RCD(K, N)$ spaces », *arXiv : 1909.00381*.

Dmitri Burago, Yuri Burago et Sergei Ivanov (2001). *A course in metric geometry*. T. 33. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xiv+415. isbn : 0-8218-2129-6.

Jeff Cheeger (1967). *Comparison and Finiteness Theorems for Riemannian manifolds*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, p. 75.

——— (1979). « On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **76** (5), p. 2103-2106.

——— (1983). « Spectral geometry of singular Riemannian spaces », *J. Differential Geom.* **18** (4), 575-657 (1984).

——— (2001). *Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds*. Lezioni Fermiane. [Fermi Lectures]. Scuola Normale Superiore, Pisa, p. ii+77.

——— (2003). « Integral bounds on curvature elliptic estimates and rectifiability of singular sets », *Geom. Funct. Anal.* **13** (1), p. 20-72.

——— (2012). « Quantitative differentiation : a general formulation », *Comm. Pure Appl. Math.* **65** (12), p. 1641-1670.

Jeff Cheeger et Tobias H. Colding (1996). « Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products », *Ann. of Math. (2)* **144** (1), p. 189-237.

——— (1997). « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I », *J. Differential Geom.* **46** (3), p. 406-480.

——— (2000). « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III », *J. Differential Geom.* **54** (1), p. 37-74.

Jeff Cheeger, Tobias H. Colding et Gang Tian (2002). « On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature », *Geom. Funct. Anal.* **12** (5), p. 873-914.

Jeff Cheeger, Robert Haslhofer et Aaron Naber (2013). « Quantitative stratification and the regularity of mean curvature flow », *Geom. Funct. Anal.* **23** (3), p. 828-847.

——— (2015). « Quantitative stratification and the regularity of harmonic map flow », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **53** (1-2), p. 365-381.

Jeff Cheeger, Wenshuai Jiang et Aaron Naber (2021). « Rectifiability of singular sets of noncollapsed limit spaces with Ricci curvature bounded below », *Ann. Math. (2)* **193** (2), p. 407-538.

Jeff Cheeger et Aaron Naber (2013a). « Lower bounds on Ricci curvature and quantitative behavior of singular sets », *Invent. Math.* **191** (2), p. 321-339.

——— (2013b). « Quantitative stratification and the regularity of harmonic maps and minimal currents », *Comm. Pure Appl. Math.* **66** (6), p. 965-990.

——— (2015). « Regularity of Einstein manifolds and the codimension 4 conjecture », *Ann. of Math. (2)* **182** (3), p. 1093-1165.

Tobias H. Colding (1997). « Ricci curvature and volume convergence », *Ann. of Math. (2)* **145** (3), p. 477-501.

——— (2012). « New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I », *Acta Math.* **209** (2), p. 229-263.

Tobias H. Colding et Aaron Naber (2013). « Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower Ricci bounds and applications », *Geom. Funct. Anal.* **23** (1), p. 134-148.

Xianzhe Dai et Xiaochun Rong, éd. (2012). *Metric and differential geometry*. T. 297. Progress in Mathematics. The Jeff Cheeger anniversary volume, Lectures from the International Conference held at the Chern Institute of Mathematics, Tianjin, and the Capital Normal University, Beijing, May 11–15, 2009. Birkhäuser/Springer, Basel, p. xlviii+361.

Camillo De Lellis, Andrea Marchese, Emanuele Spadaro et Daniele Valtorta (2018). « Rectifiability and upper Minkowski bounds for singularities of harmonic Q-valued maps », *Comment. Math. Helv.* **93** (4), p. 737-779.

Yu Ding (2002). « Heat kernels and Green's functions on limit spaces », *Comm. Anal. Geom.* **10** (3), p. 475-514.

Simon K. Donaldson (2012). « Calabi-Yau metrics on Kummer surfaces as a model gluing problem », in : *Advances in geometric analysis*. T. 21. Adv. Lect. Math. (ALM). Int. Press, Somerville, MA, p. 109-118.

Nick Edelen et Max Engelstein (2019). « Quantitative stratification for some free-boundary problems », *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (3), p. 2043-2072.

Matteo Focardi, Andrea Marchese et Emanuele Spadaro (2015). « Improved estimate of the singular set of Dir-minimizing Q-valued functions via an abstract regularity result », *J. Funct. Anal.* **268** (11), p. 3290-3325.

Lorenzo Foscolo (2018). « Gravitational instantons and degenerations of Ricci-flat metrics on the K3 surface », Fields Institute Communications.

Gary W. Gibbons et Christopher N. Pope (1979). « The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity », *Comm. Math. Phys.* **66** (3), p. 267-290.

Nicola Gigli, Andrea Mondino et Giuseppe Savaré (2015). « Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **111** (5), p. 1071-1129.

Wenshuai Jiang et Aaron Naber (2021). « L^2 curvature bounds on manifolds with bounded Ricci curvature », *Ann. Math. (2)* **193** (1), p. 107-222.

Dominic Joyce (2000). *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, p. xii+436.

——— (2004). « Constructing compact manifolds with exceptional holonomy », in : *Strings and geometry*. T. 3. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 177-191.

Christian Ketterer (2015a). « Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem », *J. Math. Pures Appl. (9)* **103** (5), p. 1228-1275.

——— (2015b). « Obata's rigidity theorem for metric measure spaces », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **3** (1), p. 278-295.

Claude LeBrun et Michael Singer (1994). « A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds », *Math. Ann.* **300** (1), p. 165-180.

Nan Li et Aaron Naber (2020). « Quantitative estimates on the singular sets of Alexandrov spaces », *Peking Math. J.* **3** (2), p. 203-234.

Andrea Mondino et Aaron Naber (2019). « Structure theory of metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21** (6), p. 1809-1854.

Aaron Naber (2014). « The geometry of Ricci curvature ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*. Kyung Moon Sa, Seoul, p. 911-937.

Aaron Naber (2020). « Lecture notes on rectifiable Reifenberg for measures », in : *Harmonic analysis and applications*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) ; Princeton, NJ : Institute for Advanced Study (IAS), p. 289-346.

Aaron Naber et Daniele Valtorta (2017a). « Rectifiable-Reifenberg and the regularity of stationary and minimizing harmonic maps », *Ann. of Math. (2)* **185** (1), p. 131-227.

——— (2017b). « Volume estimates on the critical sets of solutions to elliptic PDEs », *Comm. Pure Appl. Math.* **70** (10), p. 1835-1897.

——— (2019). « Energy identity for stationary Yang Mills », *Invent. Math.* **216** (3), p. 847-925.

Aaron Naber, Daniele Valtorta et Giona Veronelli (2019). « Quantitative regularity for p-harmonic maps », *Comm. Anal. Geom.* **27** (1), p. 111-159.

Peter Petersen (2016). *Riemannian geometry*. Third. T. 171. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, p. xviii+499.

Ernst R. Reifenberg (1960). « Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type », *Acta Math.* **104**, p. 1-92.

Leon Simon (1996). *Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Based on lecture notes by Norbert Hungerbühler. Birkhäuser Verlag, Basel, p. viii+152.

Gang Tian (1990). « On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class », *Invent. Math.* **101** (1), p. 101-172.

Pankaj Topiwala (1987). « A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$. I, II », *Invent. Math.* **89** (2), p. 425-448, 449-454.

Ilaria Mondello

Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées
Université Paris Est Créteil
61 Avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil Cedex
E-mail : ilaria.mondello@u-pec.fr